Kennzeichnung der halbrationalen Körper

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde
der hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Martin Luther-Universität
Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Gerhard Görner
aus Leuna.

Halle/S.

1936

Druck: BUCHDRUCKEREI JOH. MOLTZEN, LEIPZIG O 5
Wurzner Straße 9

Referent: Professor Dr. H. W. E. Jung.

Korreferent: Professor Dr. H. Brandt.

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juni 1936.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen Eltern gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548122_0149

Inhalt.

Seite

Einleitung 7

I. Über die Definition der Stellen 8

II. Einige Vorbemerkungen 9

III. Beweis des Hauptsatzes über halbrationale Körper für den Fall $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$ 10

IV. Charakterisierung der algebraischen Körper mit $\{\mathfrak{K}^a\} = o$ für alle $a > 0$ 12

V. Beweis des Hauptsatzes über halbrationale Körper für den Fall $p_a = -1, (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 0$ 17

VI. Einige Hilfssätze 30

VII. Beweis des Hauptsatzes über halbrationale Körper für den Fall $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$ 35

Einleitung.

Es lassen sich drei Arten algebraischer Körper von zwei unabhängigen Veränderlichen, die wir allgemein mit K bezeichnen wollen, unterscheiden:

I. K besteht aus den rationalen Funktionen zweier seiner Größen x und y. Ein solcher Körper K heißt *rational.*

II. K entsteht aus einem algebraischen Körper $k \equiv (yz)$ einer unabhängigen Veränderlichen durch Hinzufügen einer zweiten unabhängigen Veränderlichen x. Ein solcher Körper K heißt *halbrational.*

Das Geschlecht p von k ist gleich $-p_a$, wenn p_a das arithmetische Geschlecht des halbrationalen Körpers K ist*). K ist dann und nur dann rational, wenn $p = -p_a = 0$ ist. Rationale und halbrationale Körper K enthalten immer primitive Divisorenklassen $(\mathfrak{C})$ mit $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) < 0$, wo $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse von K ist.

III. Ist K weder rational noch halbrational, so heißt K *eigentlich algebraisch.*

Bezeichnen wir allgemein die Dimension einer Klasse $(\mathfrak{Q})$ mit $\{\mathfrak{Q}\}$, so gilt:

Ist $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse, so ist für rationale und halbrationale Körper

$$\{\mathfrak{K}^\alpha\} = 0 \text{ für alle } \alpha > 0.$$

In der vorliegenden Arbeit soll hierzu die Umkehrung bewiesen werden, also der Satz:

Ist $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse eines algebraischen Körpers zweier unabhängiger Veränderlicher und ist

$$\{\mathfrak{K}^\alpha\} = 0 \textit{ für alle } \alpha > 0,$$

so ist der Körper rational oder halbrational.

Dieser Hauptsatz über halbrationale Körper ist schon bekannt und von *G. Castelnuovo* und *F. Enriques* (Lit. Verz. 3, 4) zuerst bewiesen worden. Aber die von ihnen gegebenen Beweise sind nicht

*) Die in der Einleitung angeführten Sätze ergeben sich leicht bei der Bestimmung der kanonischen Klasse und durch Anwendung der Formel für die Zeuthen-Segresche Invariante auf das Büschel $\langle \mathfrak{M} \rangle$. Auch sind sie aus den Abhandlungen italienischer Mathematiker (Lit. Verz. 3, 4) bekannt.

streng, d. h. sie umfassen nicht alle Fälle, die mit Hilfe der heute entwickelten Methoden berücksichtigt werden können und müssen. Daher werden diese Beweise neu geführt, wobei sich der Beweisgang oft an das Vorbild der italienischen Mathematiker anschließt. Wir beschränken uns wie diese in ihrer Abhandlung „Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche“ auf die Zurückführung des Beweises auf einige Hilfssätze, die im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr bewiesen werden können.

Unseren Betrachtungen liegt die Theorie der algebraischen Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher von H. W. E. Jung zugrunde, wie sie in den Spezialabhandlungen von H. W. E. Jung — vor allem im Journal für die reine und angewandte Mathematik — entwickelt ist. Diese Arbeiten werden als grundlegend vorausgesetzt und im folgenden nicht näher zitiert.

I. Über die Definition der Stellen.

In einem algebraischen Körper K zweier unabhängiger Veränderlicher lassen sich die Stellen auf wesentlich verschiedene Arten definieren. (Zu diesem Abschnitt vergl. Lit.-Verz. 2). Es seien die Stellen von K auf zwei Arten definiert. Bei der einen Definition sei K mit K und bei der anderen mit K' bezeichnet. Den Übergang von K zu K' und umgekehrt nennen wir eine *Stellentransformation.* Eine solche ist dadurch vollkommen gekennzeichnet, daß endlich viele Primteiler erster Art in Primteiler zweiter Art übergehen und umgekehrt. Gehen nur Primteiler erster Art von K in solche zweiter Art von K' über oder nur Primteiler zweiter Art von K in solche erster Art von K', so heißt die Stellentransformation *einseitig.* Es gilt der Satz, daß sich jede Stellentransformation aus zwei einseitigen zusammensetzen läßt.

Eine Gesamtheit von Primteilern erster Art, die durch eine einseitige Stellentransformation in Primteiler zweiter Art verwandelt werden können, heißt ein *vollkommenes System von Primteilern.* Ein solches kann auch aus einem einzigen Primteiler bestehen, der dann ein *vollkommener Primteiler* genannt wird. Es gelten die Sätze:

1. In jedem vollkommenen System ist mindestens ein vollkommener Primteiler enthalten.

2. Ein Primteiler $\mathfrak{P}$ ist dann und nur dann vollkommen, wenn

$$(1) \qquad (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) = -1,$$

wo $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse von K ist.

Ist $\pi(\mathfrak{P})$ das Geschlecht und $2\sigma(\mathfrak{P})$ die Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$, so ist

$$(2) \qquad (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) + (\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) = -2 + 2\pi(\mathfrak{P}) + 2\sigma(\mathfrak{P}).$$

Da $\pi(\mathfrak{P})$ und $\sigma(\mathfrak{P})$ nur nicht negative ganze Zahlen sein können, so folgt aus (2), daß (1) dann und nur dann besteht, wenn

$$(3) \qquad (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) < 0, \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) < 0.$$

2'. Ein Primteiler $\mathfrak{P}$ ist also dann und nur dann vollkommen, wenn die Ungleichheiten (3) bestehen.

3. Geht durch eine Stellentransformation der Körper K in K' über, so sind die kanonischen Klassen $(\mathfrak{K})$ und $(\mathfrak{K}')$ von K und K' nicht identisch. Es sind aber für positives α die Dimensionen $\{\mathfrak{K}^\alpha\}$ und $\{\mathfrak{K}'^\alpha\}$ der Klassen $(\mathfrak{K}^\alpha)$ und $(\mathfrak{K}'^\alpha)$ einander gleich. Für negatives α gilt das nicht.

4. Jedes vollkommene System von Primteilern — dasselbe gilt im besonderen für jeden vollkommenen Primteiler — kann durch eine einseitige Stellentransformation in Primteiler zweiter Art verwandelt werden, ohne daß nicht dem System angehörige Primteiler ihre Art ändern.

5. Gehen bei einer einseitigen Stellentransformation ϱ Primteiler erster Art in Primteiler zweiter Art über, so wird dadurch der Grad $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ der kanonischen Klasse $(\mathfrak{K})$ um ϱ vergrößert.

Durch wiederholte Anwendung von einseitigen Stellentransformationen können wir also erreichen, daß entweder $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$ wird oder, wenn immer $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$ bleibt, daß keine vollkommenen Primteiler vorhanden sind. Wir unterscheiden daher die beiden Hauptfälle

$$\text{A.} \quad (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0.$$
$$\text{B.} \quad (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$$

und es gibt keine vollkommenen Primteiler.

Auch wenn $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$ ist, kann es sein, daß kein vollkommener Primteiler vorhanden ist. Aber die Annahme $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$ genügt für unsere Zwecke.

II. Einige Vorbemerkungen.

1. Aus unserer Voraussetzung $\{\mathfrak{K}^\alpha\} = 0$ für alle $\alpha > 0$ folgt im besonderen $\{\mathfrak{K}\} = p_g = 0$. Nach dem Riemann-Rochschen Satze, angewandt auf die kanonische Klasse, ergibt sich $p_g \geqq p_a$. Es ist also für unsere Körper

$$p_a \leqq 0.$$

2. K enthalte ein Büschel $\langle \mathfrak{C} \rangle$ ohne Basispunkte vom Geschlechte

p von Primteilern $\mathfrak{E}$ des Geschlechtes π. Ist $p > 0$, so hat $\langle \mathfrak{E} \rangle$ nie Basispunkte. Es besteht die Gleichung von Zeuthen-Segre

$$(4) \qquad \delta + 4\,(p-1)\,(\pi-1) + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 12\,(p_a + 1).$$

Hierin bedeutet δ im einfachsten Fall die Anzahl derjenigen Primteiler aus $\langle \mathfrak{E} \rangle$, die einen Doppelpunkt haben. Im allgemeinen liefern zu δ diejenigen $\mathfrak{E}$ einen Beitrag, die eine mehrfache Stelle haben oder die zerfallen. Jedenfalls ist immer $\delta \geqq 0$.

3. Ist $p_a = -1$, so gibt es in K ein Büschel $\langle \mathfrak{E} \rangle$ vom Geschlechte $p = 1$ (Lit.-Verz. 4, § 1). Wenden wir hierauf (4) an, so folgt

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = -\delta \leqq 0.$$

Ist $p_a \leqq -2$, so gibt es in K ein Büschel $\langle \mathfrak{E} \rangle$ vom Geschlechte $p \geqq 2$ (Lit.-Verz. 4, § 1). Ist $\pi = 0$, so ist nach einem — im folgenden oft gebrauchten — Satze von M. Noether (Lit.-Verz. 1) K halbrational. Wir können uns daher auf den Fall $\pi \geqq 1$ beschränken. Dann folgt aus (4)

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) < -[\delta + 4\,(p-1)\,(\pi-1)] \leqq 0.$$

Wir können also voraussetzen

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0, \text{ wenn } p_a = -1,$$
$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) < 0, \text{ wenn } p_a \leqq -2;$$

und ist $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$, so können wir uns auf den Fall $p_a = 0$ beschränken.

III. Beweis des Hauptsatzes über halbrationale Körper für den Fall $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$.

Nach II können und wollen wir uns unter den Voraussetzungen $\{\mathfrak{K}^\alpha\} = 0$ für alle $\alpha > 0$ und $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$ auf den Fall $p_a = 0$ beschränken. Dann folgt wegen $\{\mathfrak{K}^2\} = 0$ nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$\{\mathfrak{K}^{-1}\} \geqq p_a + 1 + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) - \{\mathfrak{K}^2\} = 1 + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \geqq 2.$$

Die Klasse $(\mathfrak{K}^{-1})$ kann imprimitiv sein, sie enthalte den Faktor $\mathfrak{V}$ und es sei

$$(5) \qquad (\mathfrak{K}^{-1}) = \mathfrak{V}(\mathfrak{H}),\ \mathfrak{K}\mathfrak{V}\mathfrak{H} \sim 1,\ \{\mathfrak{H}\} \geqq 2,$$

wo die Klasse $(\mathfrak{H})$ primitiv sein soll. Da der Faktor $\mathfrak{V}$ zu einem allgemeinen ganzen Divisor der primitiven Klasse $(\mathfrak{H})$ teilerfremd ist, und da die Zahl der Schnittpunkte zweier teilerfremder ganzer Divisoren nicht negativ sein kann, ist

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) \geqq 0.$$

Wenn die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H})$ alle zerfallen, dann können sie ganz allgemein nur in Primteiler eines Büschels zerfallen. Es sei etwa

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_r \tag{6}$$

ein nicht spezieller ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{H})$, wo die $\mathfrak{P}_i$ voneinander verschiedene Primteiler sein sollen. Da jeder Schnittpunkt zweier Divisoren eines Büschels eine feste Stelle des Büschels ist, können die $\mathfrak{P}_i$ nur feste Schnittstellen haben und es wird $(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k) \geqq 0$ unabhängig von i und k. Ferner können die Divisoren einer linearen Schar keine beweglichen mehrfachen Stellen haben. Daher haben die Primteiler $\mathfrak{P}_i$, abgesehen von endlich vielen, alle dieselbe Ordnung des Divisors ihrer mehrfachen Stellen und dasselbe Geschlecht. Wir setzen

$$\pi(\mathfrak{P}_k) = p, \quad \sigma(\mathfrak{P}_k) = d, \quad (\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_l) = \mu. \tag{7}$$

Es ist nach (5)

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) = -(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) \leqq 0 \tag{8}$$

und nach (6)

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) = \sum_i (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i\mathfrak{K}) + 2\sum_{i<k} (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k) = r(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i\mathfrak{K}) + \frac{2r(r-1)}{2}(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k),$$

also wegen (7), (8)

$$2r(p + d - 1) + \mu r(r-1) = -(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) \leqq 0. \tag{9}$$

Da $d \geqq 0$, $\mu \geqq 0$, $r \geqq 1$, so ist $p \leqq 1$.

Für $p = 0$ enthält der Körper K ein Büschel von Primteilern vom Geschlechte 0. Dann ist K nach M. Noether halbrational, wegen $p_a = 0$ rational und der Satz ist bewiesen.

Für $p = 1$ folgt aus (9) $(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) = 0$, $d = 0$ und entweder $\mu = 0$ oder $r = 1$.

Es sei zunächst $\mu = 0$. Dann ist nach (6), (7) $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = 0$. Wegen $(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) = 0$ ist nach (8) auch $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = 0$, also

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = 0. \tag{10}$$

Aus (5) ergibt sich

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{V}, \mathfrak{K}) = 0, \quad (\mathfrak{V}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) = 0,$$

also $$(\mathfrak{V}, \mathfrak{K}) = -(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}), \quad (\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}).$$

Wegen $\{\mathfrak{K}\} = 0$ ist auch $\{\mathfrak{K}\mathfrak{V}^{-1}\} = 0$ und nach dem Riemann-Rochschen Satze wird

$$\{\mathfrak{V}\} \geqq 1 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{V}, \mathfrak{K}) - \{\mathfrak{K}\mathfrak{V}^{-1}\} \geqq 1 + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \geqq 2.$$

Das ist aber nicht möglich, da $\mathfrak{V}$ Faktor einer Klasse mit der Dimension größer als 1 ist.

Es muß daher $\mu > 0$, also $r = 1$ sein. Dann ist nach (6) und (7)

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = \mu > 0 \quad \text{und} \quad \pi(\mathfrak{H}) = p = 1.$$

Wegen $\{\mathfrak{H}\} \geqq 2$ enthält der Körper K das aus zwei ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H})$ gebildete Büschel und das ist ein Büschel von Primteilern vom Geschlechte 1 mit mindestens einem einfachen Basispunkt. Dann ist K nach einem Satze von G. Castelnuovo und F. Enriques (Lit.-Verz. 5, Nr. 5) halbrational und wegen $p_a = 0$ rational.

Damit ist der Hauptsatz über halbrationale Körper für den Fall $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$ bewiesen.

IV. Charakterisierung der algebraischen Körper mit $\{\mathfrak{K}^a\} = 0$ für alle $a > 0$.

In diesem Abschnitt soll bewiesen werden, daß folgende drei Annahmen gleichwertig sind:

I. Für einen algebraischen Körper K zweier unabhängiger Veränderlicher ist

(11) $$\{\mathfrak{K}^a\} = 0 \text{ für alle } a > 0.$$

II. In K gibt es eine primitive Klasse $(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \geqq 2$, so daß

(12) $$(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) < 0.$$

III. In K gibt es für jeden Divisor $\mathfrak{Q}$ eine Zahl $a_0 > 0$, so daß

(13) $$\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^a\} = 0 \text{ für } a \geqq a_0.$$

Gilt für einen algebraischen Körper K eine dieser drei Annahmen, so gelten sie alle drei. Wenden wir uns dann der Aufgabe zu, den Hauptsatz über halbrationale Körper für den Fall $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$ zu beweisen, so können wir eine beliebige dieser drei Annahmen voraussetzen, denn aus jeder von ihnen folgt, daß K ein rationaler oder halbrationaler Körper ist, wenn dieser Satz für eine dieser Annahmen bewiesen ist.

Zum Beweise unserer Behauptung beweisen wir folgende Sätze:

1. Enthält der Körper K eine primitive Klasse $(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \geqq 2$ und $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) < 0$, so gibt es für jede Klasse $(\mathfrak{Q})$ eine Zahl $a_0 > 0$, so daß $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^a\} = 0$ ist für $a \geqq a_0$.

2. Gibt es für jede Klasse $(\mathfrak{Q})$ eine Zahl $a_0 > 0$, so daß $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^a\} = 0$ ist für $a \geqq a_0$, so gibt es eine primitive Klasse $(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \geqq 2$, für die $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) < 0$ ist.

3. Gibt es in K für jede Klasse $(\mathfrak{Q})$ eine Zahl $a_0 > 0$, so daß $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^a\} = 0$ ist für $a \geqq a_0$, so ist $\{\mathfrak{K}^a\} = 0$ für alle $a > 0$.

4. Ist $\{\mathfrak{K}^a\} = 0$ für alle $a > 0$, so gibt es für jede Klasse $(\mathfrak{Q})$ eine Zahl $a_0 > 0$, so daß $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^a\} = 0$ ist für $a \geqq a_0$.*)

*) Die Sätze 1–3 finden sich auch bei G. Castelnuovo und F. Enriques (Lit.-Verz. 3, Nr. 3 u. 12), Satz 4 ergibt sich auch bei F. Enriques (Lit.-Verz. 4, § 8).

Diese Sätze gelten auch für $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$ und wir beweisen sie auch für diesen Fall, obwohl wir sie nur für $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$ verwenden werden.

Beweis für Satz 1:

Es sei $(\mathfrak{H})$ eine primitive Klasse mit $\{\mathfrak{H}\} \geqq 2$ und $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) < 0$. Ist dann $(\mathfrak{Q})$ irgend eine Klasse, so folgt

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{Q}) + \alpha(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) < 0$$

für genügend große positive Werte von α, etwa für $\alpha \geqq \alpha_0$. Da die Klasse $(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \geqq 2$ primitiv ist, hat ein allgemeiner ganzer Divisor $\mathfrak{H}$ mit einem allgemeinen Divisor der Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha})$ keinen gemeinsamen Faktor. Da ferner die Zahl der Schnittpunkte zweier teilerfremder ganzer Divisoren nicht negativ sein kann, kann die Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha})$ für $\alpha \geqq \alpha_0$ keine ganze Divisoren enthalten, d. h. es ist $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}\} = 0$ für $\alpha \geqq \alpha_0$.

Beweis für Satz 2:

Es sei $\delta > 0$ eine ganze Zahl und $\mathfrak{C}$ ein Primteiler mit

$$\{\mathfrak{C}\} \geqq 2, \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) > 0, \quad \{\mathfrak{C}\mathfrak{K}\} > 0.$$

Wir setzen $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{C}^{\delta}$ und wählen die Zahl δ so groß, daß die Klasse $(\mathfrak{Q})$ primitiv ist und

$$(14) \quad \begin{cases} \{\mathfrak{Q}\} \geqq 2, \quad \{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}\} \geqq 2, \quad \{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}\} = 0 \text{ für } \alpha \geqq \alpha_0, \\ \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) + p_a + 1 > 0. \end{cases}$$

Ist $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{K}) < 0$, so ist der Satz bewiesen.

Ist $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{K}) \geqq 0$, $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \geqq 0$, so folgt nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}\} + \{\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{K}^{1-\alpha}\} \geqq p_a + 1 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + \frac{2\alpha-1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{K}) > 0.$$

Wegen (14) wird $\{\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{K}^{1-\alpha}\} > 0$ für $\alpha \geqq \alpha_0$. Daher gibt es immer eine primitive Klasse $(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \geqq 2$, so daß $(\mathfrak{H}, \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{K}^{1-\alpha}) > 0$. Dann muß $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) < 0$ sein und der Satz ist bewiesen.

Nun sei $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{K}) \geqq 0$ — also auch $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) \geqq 0$ — und $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) < 0$. Nach I nehmen wir in diesem Falle an, daß der Körper keine vollkommenen Primteiler enthält. Wir setzen

$$(15) \qquad \mathfrak{G}_i \sim \mathfrak{C}^{\delta}\mathfrak{K}^{i} = \mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{i}.$$

Es sei $\{\mathfrak{G}_{i-1}\} > 1$ und es sei gesetzt

$$(16) \quad \pi_i - 1 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_i\mathfrak{K}) = \frac{\delta^2}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) + \frac{\delta}{2}(2i+1)(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) + \frac{i(i+1)}{2}(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}).$$

Ist die Dimension der Ergänzungsklasse $(\mathfrak{G}_i')$ zur Klasse $(\mathfrak{G}_i)$ $\{\mathfrak{G}_i'\} = \{\mathfrak{K}\mathfrak{G}_i^{-1}\} = \{\mathfrak{G}_{i-1}^{-1}\} = 0$, und das ist sicher der Fall, wenn $\{\mathfrak{G}_{i-1}\} > 1$ ist, so folgt nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$\{\mathfrak{G}_i\} \geqq 1 + p_a + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_i\mathfrak{K}^{-1}) = 1 - p + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}_{i-1}, \mathfrak{G}_{i-1}\mathfrak{K})$$

und daraus nach (16)

$$\{\mathfrak{G}_i\} \geqq \pi_{i-1} - p \tag{17}$$

oder

$$\{\mathfrak{G}_i\} \geqq 1 - p + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_i\mathfrak{K}) - (\mathfrak{G}_i, \mathfrak{K})$$

$$\{\mathfrak{G}_i\} \geqq \pi_i - p - \{\mathfrak{G}_i, \mathfrak{K}\}. \tag{18}$$

Nach (16) folgt

$$\pi_a - \pi_{a-1} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}_a, \mathfrak{G}_a\mathfrak{K}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}_{a-1}, \mathfrak{G}_{a-1}\mathfrak{K}) = (\mathfrak{G}_a, \mathfrak{K})$$

und daraus nach (15)

$$\pi_a - \pi_{a-1} = (\mathfrak{G}_a, \mathfrak{K}) = \delta(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) + a(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}). \tag{19}$$

Setzen wir

$$-(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \omega' > 0,$$

so wird $(\mathfrak{G}_a, \mathfrak{K}) < 0$, wenn

$$\delta(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) - a\omega' < 0, \text{ also } a > \frac{\delta(\mathfrak{C}, \mathfrak{K})}{\omega'}$$

ist. Es sei

$$a = \frac{\delta(\mathfrak{C}, \mathfrak{K})}{\omega'} + s + \varepsilon,$$

wo $s \geqq 0$ eine noch zu bestimmende ganze Zahl und $0 \leqq \varepsilon < 1$ sein soll, so daß a eine ganze Zahl wird. Dann ist nach (15) und (19)

$$(\mathfrak{G}_a, \mathfrak{K}) = \delta(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) + \delta\frac{(\mathfrak{C}, \mathfrak{K})}{\omega'}(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + (s + \varepsilon)(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$$

$$(\mathfrak{G}_a, \mathfrak{K}) = -(s + \varepsilon)\omega' < 0. \tag{20}$$

Ferner wird nach (16)

$$\pi_{a-1} = \frac{\delta^2}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) + \frac{\delta}{2}(2a - 1)(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) - a\omega'\frac{a-1}{2} + 1$$

$$= \frac{\delta^2}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) + \frac{a}{2}\{\delta(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) - s\omega' - \varepsilon\omega'\} + \tfrac{1}{2}(s\omega' + \varepsilon\omega') + 1.$$

$$\pi_{a-1} > \frac{\delta^2}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) + \frac{a}{2}\{\delta(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) - s\omega' - \varepsilon\omega'\}. \tag{21}$$

Es sei nun $r \geqq 2$ eine ganze Zahl. Da $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) > 0$ ist, können wir δ so groß wählen, daß $\pi_{a-1} > r + p$ wird. Dann folgt nach (17)

$$\{\mathfrak{G}_a\} = \{\mathfrak{C}^\delta\mathfrak{K}^a\} \geqq \pi_{a-1} - p > r \geqq 2$$

und nach (20) ist

$$(\mathfrak{G}_a, \mathfrak{K}) = -(s + \varepsilon)\omega' < 0.$$

Wenn die Klasse $(\mathfrak{G}_\alpha)$ primitiv ist, können wir $\mathfrak{G}_\alpha \sim \mathfrak{H}$ wählen und der Satz ist bewiesen.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß die Klasse $(\mathfrak{G}_\alpha)$ imprimitiv ist. Es sei

$$(\mathfrak{G}_\alpha) = \mathfrak{B}(\mathfrak{H}), \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^{h_1}\mathfrak{B}_2^{h_2}\ldots\mathfrak{B}_r^{h_r}.$$

Dann wird nach (20)

$$(\mathfrak{G}_\alpha, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = -(s+\varepsilon)\,\omega' < 0.$$

Wir zerlegen $\mathfrak{B}$ in zwei Faktoren $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'\mathfrak{B}''$, wo $\mathfrak{B}'$ diejenigen $\mathfrak{B}_i$ enthalten soll, für die $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{K}) < 0$ ist und $\mathfrak{B}''$ die anderen, so daß $(\mathfrak{B}'', \mathfrak{K}) \geqq 0$ ist. Setzen wir

$$(\mathfrak{B}', \mathfrak{K}) = -t < 0,$$

so wird

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{G}_\alpha, \mathfrak{K}) - (\mathfrak{B}', \mathfrak{K}) - (\mathfrak{B}'', \mathfrak{K}) = -(s+\varepsilon)\,\omega' + t - (\mathfrak{B}'', \mathfrak{K})$$

$$(22) \qquad (\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) \leqq -(s\omega' - t).$$

Da $\mathfrak{B}'$ Faktor von $(\mathfrak{G}_\alpha)$ ist, so ist $\{\mathfrak{B}'\} = 1$. Dann folgt nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$1 = \{\mathfrak{B}'\} \geqq 1 - p + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}', \mathfrak{B}') - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}', \mathfrak{K})$$

$$(23) \qquad 1 \geqq 1 - p + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}', \mathfrak{B}') + \tfrac{1}{2}t.$$

Bei unseren Annahmen können wir $(\mathfrak{B}', \mathfrak{B}') \geqq 0$ voraussetzen. Wäre nämlich $(\mathfrak{B}', \mathfrak{B}') < 0$, so müßte wegen $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_k) \geqq 0$ für $i \neq k$ für mindestens ein i, etwa für $i = 1$, $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) < 0$ sein. Da für $\mathfrak{B}_1$ als Faktor von $\mathfrak{B}'$ auch $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{K}) < 0$ ist, müßte $\mathfrak{B}_1$ ein vollkommener Primteiler sein, die für $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) < 0$ nicht vorhanden sein sollen. Wir können also $(\mathfrak{B}', \mathfrak{B}') \geqq 0$ annehmen und dann ergibt sich aus (23)

$$t \leqq 2p - (\mathfrak{B}', \mathfrak{B}') \leqq 2p.$$

Wählen wir $s > 2p$, so ist $s\omega' \geqq t$ und nach (22) wird $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) < 0$. Damit ist der Satz 2 für alle Fälle bewiesen.

Beweis für Satz 3:

Es sei $\{\mathfrak{Q}\} \geqq 2$ und $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha\} = 0$ für $\alpha \geqq \alpha_0$. Wäre etwa $\{\mathfrak{K}^\lambda\} > 0$, so wäre auch $\{\mathfrak{K}^{\lambda n}\} > 0$ für jedes $n > 0$ und wegen $\{\mathfrak{Q}\} \geqq 2$ auch $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\lambda n}\} > 0$. Das ist aber für $\lambda n \geqq \alpha_0$ nach Voraussetzung nicht möglich und daher muß $\{\mathfrak{K}^\alpha\} = 0$ sein für alle $\alpha > 0$.

Beweis für Satz 4:

Zum Beweise dieses Satzes unterscheiden wir die drei Fälle $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$, $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) < 0$, $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 0$ und in den Fällen $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$ nehmen wir an, daß der Körper keine vollkommenen Primteiler enthält.

Es sei zunächst $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$. Nach dem Riemann-Rochschen Satze ist

$$(24) \quad \{\mathfrak{K}^\alpha\} + \{\mathfrak{K}^{1-\alpha}\} \geqq p_a + 1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}).$$

Nach II ist $p_a = 0$ und aus der Voraussetzung $\{\mathfrak{K}^\alpha\} = 0$ für alle $\alpha > 0$ folgt $\{\mathfrak{K}^{1-\alpha}\} > 0$ für $\alpha \geqq 1$ und $\{\mathfrak{K}^{1-\alpha}\} > 1$ für $\alpha \geqq 2$. Dann gibt es immer eine primitive Divisorenklasse $(\mathfrak{C})$ mit $\{\mathfrak{C}\} \geqq 2$ und $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}^{1-\alpha}) > 0$ für $\alpha \geqq 2$. Also ist $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) < 0$ und aus Satz 1 folgt, daß es für jede Klasse $(\mathfrak{Q})$ eine Zahl $\alpha_0 > 0$ gibt, so daß $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha\} = 0$ ist für $\alpha \geqq \alpha_0$.

Es sei nun $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) < 0$. Wir nehmen an, das Verfahren der wiederholten Adjunktion führe nicht zu Klassen von der Dimension 0. Es sei $(\mathfrak{C})$ eine primitive Klasse, $\{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\alpha\} \geqq 1$ für alle $\alpha > 0$ und $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{C}\mathfrak{K}^\alpha$ ein ganzer Divisor. Die Klasse $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\alpha)$ kann imprimitiv sein. Ihr Faktor, der vom Exponenten α abhängen kann, sei $\mathfrak{V}^{(\alpha)}$ und es sei

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\alpha) = \mathfrak{V}^{(\alpha)}(\mathfrak{H}^{(\alpha)}), \quad \mathfrak{V}^{(\alpha)} = \mathfrak{V}_1^{h_1}\mathfrak{V}_2^{h_2}\ldots\mathfrak{V}_r^{h_r}, \quad \{\mathfrak{H}^{(\alpha)}\} \geqq 1,$$

wo die Klasse $(\mathfrak{H}^{(\alpha)})$ primitiv sein soll. Für $\{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\alpha\} = 1$ ist $\mathfrak{H}^{(\alpha)} = 1$. Die $\mathfrak{V}_k$ seien voneinander verschiedene Primteiler, so daß $(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}_k) \geqq 0$ ist für $i \neq k$.

Für genügend große positive Werte von α wird

$$(25) \quad (\mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\alpha, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) + \alpha(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{V}^{(\alpha)}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{H}^{(\alpha)}, \mathfrak{K}) < 0.$$

Ist $(\mathfrak{V}^{(\alpha)}, \mathfrak{K}) < 0$, so ist für mindestens einen Primteiler des Faktors $\mathfrak{V}^{(\alpha)}$, etwa für $\mathfrak{V}_1$ $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{K}) < 0$ und daher

$$(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{K}^\beta) = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{C}) + \beta(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{K}) < 0$$

für genügend großes β, etwa für $\beta \geqq \beta_0$. Für $\beta \geqq \beta_0$ muß dann der Faktor $\mathfrak{V}^{(\beta)}$ der Klasse $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\beta)$ den Primteiler $\mathfrak{V}_1$ enthalten. Für diese β ist

$$(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{K}^\beta) = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}^{(\beta)}) + (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{H}^{(\beta)}) < 0.$$

Da $\mathfrak{V}_1$ Primteiler und die Klasse $(\mathfrak{H}^{(\beta)})$ primitiv ist, gilt $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{H}^{(\beta)}) \geqq 0$, also muß $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}^{(\beta)}) < 0$ und daher $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_1) < 0$ sein. $\mathfrak{V}_1$ wäre somit ein vollkommener Primteiler. Da diese aber nicht vorhanden sein sollen, muß $(\mathfrak{V}^{(\alpha)}, \mathfrak{K}) \geqq 0$ sein. Nun ergibt sich aus (25) $(\mathfrak{H}^{(\alpha)}, \mathfrak{K}) < 0$. Es kann also $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ nicht gleich 1 sein, so daß $\{\mathfrak{H}^{(\alpha)}\} \geqq 2$. Nach Satz 1 folgt dann die Behauptung.

Endlich sei $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 0$. Nach II kann p_a nur die Werte 0 oder -1 annehmen.

Für den Fall $p_a = 0$ folgt nach (24) $\{\mathfrak{K}^{1-\alpha}\} \geqq 1$ für alle $\alpha > 0$. Ist $\{\mathfrak{K}^{1-\alpha}\} = 1$, so kann — für $\alpha > 1$ — der ganze Divisor aus $(\mathfrak{K}^{1-\alpha})$ nicht etwa 1 sein. Denn dann wäre $\mathfrak{K}^{1-\alpha} \sim 1$ und $\mathfrak{K}^{\alpha-1} \sim 1$, so daß $\{\mathfrak{K}^{\alpha-1}\} = 1 > 0$ gegen die Voraussetzung. Daher ergibt sich wie im Falle $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) > 0$ die Behauptung.

Für den Fall $p_a = -1$ wird der Satz bewiesen sein, wenn wir unter V gezeigt haben, daß ein algebraischer Körper K mit

$$(26) \quad \{\mathfrak{K}^\alpha\} = 0 \text{ für alle } \alpha > 0,\ p_a = -1,\ (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 0$$

halbrational ist. Denn halbrationale Körper enthalten, wie schon in der Einleitung angegeben, immer primitive Klassen $(\mathfrak{C})$ mit $\{\mathfrak{C}\} \geqq 2$ und $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) < 0$ und dann folgt die Behauptung aus Satz 1.

V. Beweis des Hauptsatzes über halbrationale Körper für den Fall $p_a = -1$, $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 0$.

Wir setzen in diesem Abschnitt die Gleichungen (26) voraus. Wegen $p_g = 0, p_a = -1$ enthält der Körper K einen Unterkörper k einer unabhängigen Veränderlichen vom Geschlechte $p = 1$ (Lit.-Verz. 4, § 1). Im Körper k gibt es Funktionen zweiter Ordnung. Eine solche sei x. Dann können wir eine primitive Größe ξ von k in bezug auf x in der Form

$$\xi = \sqrt{(x-a_1)\dots(x-a_4)} \tag{27}$$

annehmen. Ferner können wir annehmen, daß K außer den Funktionen aus k keine Funktionen enthält, die algebraisch nur von x abhängen.

Bezeichnet u eine Ortsfunktion bei einer Stelle s in k, so können wir an jeder Stelle s, wo x einen von den a_i verschiedenen Wert a annimmt, $x - a = u$ und bei einer Stelle s, wo x einen der Werte a_i annimmt, $x - a_i = u^2$ setzen.

Es sei $\mathfrak{p}$ der zu einer Stelle s von k gehörende Primteiler, der durch die homomorphe Abbildung des Körpers k auf den Konstantenkörper $[\mathfrak{p}]$ definiert wird. Mit der Abbildung von k auf $[\mathfrak{p}]$ wird gleichzeitig der Körper K homomorph auf einen Körper $[\mathfrak{C}]$ einer Veränderlichen abgebildet und umgekehrt. Der Körper $[\mathfrak{C}]$ zerfällt *i. a.* nicht, so daß durch diese Abbildung *i. a.* ein Primteiler $\mathfrak{C}$ definiert wird. In dieser Weise ist jeder Stelle s von k ein Primteiler oder ganzer Divisor $\mathfrak{C}$ von K zugeordnet. Wir erhalten so eine einfach unendliche Schar von Primteilern oder ganzen Divisoren $\mathfrak{C}$, die den Stellen oder Primteilern des Körpers k eineindeutig entsprechen, also ein Büschel $\langle\mathfrak{C}\rangle$. Das Geschlecht eines allgemeinen Primteilers $\mathfrak{C}$ sei $\pi(\mathfrak{C}) = \pi$.

Wenden wir auf dieses Büschel die Formel (4) für die Zeuthen-Segresche Invariante an, so folgt wegen (26) $\delta = 0$. Daher kann keiner der ganzen Divisoren $\mathfrak{C}$ zerfallen, d. h. jeder ganze Divisor $\mathfrak{C}$ ist ein Primteiler, keiner hat eine mehrfache Stelle und alle haben dasselbe Geschlecht π.

Ist ϱ eine Funktion aus k, die den Primteiler $\mathfrak{p}$ in erster Potenz enthält, und R eine Funktion aus k, also gleichzeitig eine Funktion aus K, so gibt es eine ganze Zahl λ, so daß

$$\frac{R}{\varrho^\lambda} \to e \text{ bei der Abbildung } k \to [\mathfrak{p}],$$

wo e eine von 0 und ∞ verschiedene Zahl bedeutet. Da mit der Abbildung von k auf $[\mathfrak{p}]$ die Abbildung von K auf $[\mathfrak{C}]$ gleichbedeutend ist, gilt auch

$$\frac{R}{\varrho^{\lambda}} \to e \text{ bei der Abbildung } K \to [\mathfrak{C}].$$

ϱ ist als Funktion aus k auch eine Funktion aus K und daher enthält R als Funktion aus K den $\mathfrak{p}$ entsprechenden Primteiler $\mathfrak{C}$ in derselben Potenz wie sie als Funktion aus k den Primteiler $\mathfrak{p}$ enthält. Ist daher, in Primteiler von k zerlegt,

$$R = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \mathfrak{p}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{p}_{\mu}^{\lambda_{\mu}}$$

und ist $\mathfrak{C}_i$ der $\mathfrak{p}_i$ entsprechende Primteiler, so ist in K die Zerlegung von R in Primteiler

$$R = \mathfrak{C}_1^{\lambda_1} \mathfrak{C}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{C}_{\mu}^{\lambda_{\mu}}. \tag{28}$$

Wegen $\pi(k) = p > 0$ haben die Funktionen aus k an allen Stellen von K bestimmte Werte, gleichgültig, wie die Stellen von K definiert sind (Lit.-Verz. 1, Nr. 3). Es entspricht daher jeder Stelle S von K eine Stelle s von k. Da ferner jeder Stelle s von k ein und nur ein Primteiler $\mathfrak{C}$ entspricht, geht durch jede Stelle S von K ein und nur ein Primteiler $\mathfrak{C}$. Daher können zwei verschiedene Primteiler $\mathfrak{C}$, etwa $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, einander nicht treffen, so daß $(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = 0$ oder allgemeiner $(\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_k) = 0$ ist für $i \neq k$. Ist R eine Funktion aus k und gilt für R in K die Zerlegung (28), so wird wegen $R \sim 1$

$$(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_1^{\lambda_1} \mathfrak{C}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{C}_{\mu}^{\lambda_{\mu}}) = \sum_i \lambda_i (\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_i) = (\mathfrak{C}_1, 1) = 0.$$

Da $(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_i) = 0$ ist für $i \neq 1$, so folgt auch $(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_1) = 0$ und allgemeiner $(\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_i) = 0$, d. h. es ist

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}') = 0, \tag{29}$$

wenn $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ irgend zwei Primteiler des Büschels $\langle \mathfrak{C} \rangle$ sind.

Wir wählen die Funktion x als erste unabhängige Veränderliche im Körper K. An der Stelle S von K, also auch an der Stelle s von k, habe x den Wert a. Wir unterscheiden die beiden Fälle $a \neq a_i$ und $a = a_i$, wo die a_i die Nullstellen der Wurzel (27) sind.

Ist zunächst $a \neq a_i$, so ist s keine Verzweigungsstelle von k und es gibt in k zwei Stellen s, s', bei denen x den Wert a annimmt. Die zu ihnen gehörenden Primteiler aus $\langle \mathfrak{C} \rangle$ seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$. Dann ist $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ der Zähler von $x - a$ in K. Der Primteiler $\mathfrak{C}$ gehe durch die Stelle S, dann geht $\mathfrak{C}'$ nicht durch S. Die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{C}'$ ist an der Stelle S eine Einheit und kann gleich 1 angenommen werden, während die zugeordnete Funktion $\mathfrak{C}(u, v)$ des Primteilers $\mathfrak{C}$ eine gewöhnliche Potenzreihe der Ortsfunktionen

u, v ist, die für $u = v = 0$ verschwindet. Bei S wird also

$$x - a = \mathfrak{C}(u, v).$$

Da kein $\mathfrak{C}$ eine mehrfache Stelle haben kann, beginnt $\mathfrak{C}(u, v)$ mit Gliedern erster Ordnung. Durch Einführung neuer Ortsfunktionen können wir dann erreichen, daß $\mathfrak{C}(u, v) \equiv u$, also

$$x - a = \mathfrak{C}(u, v) \equiv u$$

ist, d. h. wir können bei S die eine Ortsfunktion u so wählen, daß sie gleichzeitig Ortsfunktion von k bei s ist.

Ist nun $a = a_i$, so ist s eine Verzweigungsstelle und es gibt nur eine Stelle s in k, an der x den Wert a_i annimmt. Der zugehörige Primteiler aus $\langle \mathfrak{C} \rangle$ sei $\mathfrak{W}_i$. Ist $\mathfrak{p}_i$ der zur Stelle s_i von k gehörende Primteiler, so ist jetzt $x - a_i$ durch $\mathfrak{p}_i^2$ teilbar und daher wird in K der Zähler von $x - a_i$ gleich $\mathfrak{W}_i^2$. Wie im vorigen Falle können wir wieder $\mathfrak{W}_i(u, v) \equiv u$ annehmen und dann wird bei S

$$x - a_i = \mathfrak{W}_i^2(u, v) \equiv u^2.$$

Auch in diesem Falle können wir bei S die eine Ortsfunktion u so wählen, daß sie gleichzeitig Ortsfunktion von k bei s ist.

Die zweite unabhängige Veränderliche y wählen wir so, daß sie nicht konstant wird, wenn man irgend einen der Primteiler $\mathfrak{C}$ gleich 0 setzt. Das ist immer möglich, wie wir jetzt zeigen wollen.

Es sei R_0 eine nicht nur von x abhängige Funktion aus K. Sie nehme für $\mathfrak{C} = 0$ den konstanten Wert c an. Ferner werde $x = a$ für $\mathfrak{C} = 0$. Ist S eine Stelle, durch die $\mathfrak{C}$ geht, so können wir bei dieser Stelle $\mathfrak{C}(u, v) \equiv u$ annehmen, wie wir oben gesehen haben. Bei S wird

$x' = x - a = u^\alpha$, wo $\alpha = 1$ oder 2; $R_0 - c = u^\lambda Q(u, v)$, wo $\lambda > 0$.

Daher ist

$$dx' dR_0 = \left\{ \frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial R_0}{\partial v} - \frac{\partial x'}{\partial v} \frac{\partial R_0}{\partial u} \right\} du dv = \alpha u^{\alpha+\lambda-1} \frac{\partial Q}{\partial v} du dv,$$

so daß $dx' dR_0$ durch $\mathfrak{C}$ teilbar wird. Da ein Doppeldifferential nur endlich viele Primteiler erster Art enthält, so kann es nur endlich viele Primteiler

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_h$$

aus $\langle \mathfrak{C} \rangle$ geben, so daß R_0 für $\mathfrak{C}_i = 0$ in eine Konstante c_i übergeht. Wir nehmen an, daß die c_i alle von 0 und ∞ verschieden sind. Sollte das nicht der Fall sein, so können wir es dadurch erreichen, daß wir R_0 durch eine passende lineare gebrochene Funktion von R_0 ersetzen.

R_k sei eine Funktion aus K, die für $\mathfrak{C}_k = 0$ nicht konstant wird. Eine solche Funktion gibt es sicher, da ja für $\mathfrak{C}_k = 0$ nicht alle Funktionen aus K in Konstante übergehen können. Es werde R_k

zu r_k für $\mathfrak{C}_k = 0$. Ferner können wir wieder annehmen, daß es keinen Primteiler $\mathfrak{C}$ gibt derart, daß für $\mathfrak{C} = 0$ R_k in ∞ übergeht. Wir setzen

$$y = R_0 + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \ldots + \lambda_h R_h,$$

wo die λ_k Konstante sind. Bei nicht spezieller Wahl der λ_k gibt es dann kein $\mathfrak{C}$, so daß y für $\mathfrak{C} = 0$ in eine Konstante übergeht. Daraus folgt, daß y nicht nur von x abhängen kann. Wir können also y als zweite unabhängige Veränderliche wählen.

Es gibt dann keinen Primteiler erster Art $\mathfrak{P}$, der, gleich Null gesetzt, x und y beide zu Konstanten macht, denn x kann nur längs eines der Primteiler $\mathfrak{C}$ konstant werden. Mit anderen Worten, es sind keine Punktprimteiler vorhanden.

An der Stelle S sei $x = a$. Wir unterscheiden wieder die beiden Fälle $a \neq a_i$ und $a = a_i$.

Ist zunächst $a \neq a_i$, so ist bei S

$$x' = x - a = u \qquad y = y\,(u, v).$$

Da y für $u = 0$ nicht konstant werden darf, so ist $\frac{\partial y}{\partial v}$ nicht durch u teilbar. Es wird

$$dxdy = dx'dy = \frac{\partial y}{\partial v} du dv,$$

so daß bei dieser Stelle die zugeordnete Funktion des Verzweigungsdivisors

$$\mathfrak{Z}\,(u, v) = \frac{\partial y}{\partial v}$$

ist. Es hat $\mathfrak{Z}\,(u, v)$ nicht den Faktor u, so daß $\mathfrak{Z}$ nicht durch $\mathfrak{C}$ teilbar ist.

Ist $a = a_i$, so ist bei S

$$x' = x - a = u^2, \qquad y = y\,(u, v).$$

Es wird entsprechend

$$\mathfrak{Z}\,(u, v) = 2u \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{Z}$ hat den Faktor u, und daher wird $\mathfrak{Z}$ genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{W}_i$ teilbar. Daraus folgt: Setzen wir

$$(30) \qquad \mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \mathfrak{W}_3 \mathfrak{W}_4, \qquad \mathfrak{Z} = \mathfrak{W}\mathfrak{Z}_0,$$

so enthält $\mathfrak{Z}_0$ keinen der Primteiler aus $\langle \mathfrak{C} \rangle$. Es ist

$$\mathfrak{K} \sim \mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2} \sim \mathfrak{W}\mathfrak{Z}_0\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}.$$

Da $\xi = \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{L}^2} \sim 1$, so folgt $\mathfrak{W} \sim \mathfrak{L}^2$ und daher

$$(31) \qquad \mathfrak{K} \sim \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{M}^{-2}.$$

Da die Primteiler $\mathfrak{C}$ keine mehrfachen Stellen haben können, ist wegen (29)

$$(32) \qquad 2\pi - 2 = 2\pi(\mathfrak{C}) - 2 = (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}\mathfrak{K}) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}).$$

Wir wollen zeigen, daß $\pi = 0$ sein muß. Dazu leiten wir aus den Annahmen $\pi > 1$ und $\pi = 1$ Widersprüche zu den Voraussetzungen (26) her.

Fall I: Es sei $\pi > 1$.

Nach (32) ist $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) > 0$ und nach dem Riemann-Rochschen Satze wird wegen (26)

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu\} + \{\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{K}^{1-\nu}\} &\geqq p_a + 1 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) + \frac{\nu(\nu-1)}{2}(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \\ &\quad + \frac{2\nu-1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) \\ &\geqq \frac{2\nu-1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) > 0 \text{ für } \nu \geqq 2.\end{aligned}$$

Nun wird

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{K}^{1-\nu}) = (1-\nu)(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) < 0$$

für $\nu \geqq 2$ und daher $\{\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{K}^{1-\nu}\} = 0$, so daß

$$(33) \qquad \{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu\} \geqq \frac{2\nu-1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) > 0 \text{ für } \nu \geqq 2.$$

Ferner ist nach der Definitionsgleichung für den Defekt einer Klasse

$$(34) \qquad \{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu\} = \left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right\} + \left\{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu\right\}_{\mathfrak{C}_0} - \omega_{\mathfrak{C}_0}(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu).$$

Nach dem Riemann-Rochschen Satze für Funktionen einer Veränderlichen ist

$$\{\mathfrak{q}\} = q - \pi + 1 + \{\mathfrak{q}'\},$$

wo q die Ordnung der Klasse $(\mathfrak{q})$, $(\mathfrak{q}')$ die Ergänzungsklasse zu $(\mathfrak{q})$ und π das Geschlecht des Körpers ist. Wir wenden den Satz an auf die Klasse $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu)_{\mathfrak{C}_0}$ des Körpers $[\mathfrak{C}_0]$. Ihre Ordnung ist $(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu)$, das Geschlecht des Körpers $[\mathfrak{C}_0]$ ist $\pi = \frac{1}{2}(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{K}) + 1$ und die Dimension der Ergänzungsklasse $(\mathfrak{q}')$ ist $\left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^{1-\nu}\right\}_{\mathfrak{C}_0} = 0$. Daher folgt aus (34)

$$\{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu\} = \left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right\} + (\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{K}) - \omega_{\mathfrak{C}_0}(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu)$$

$$(35) \qquad \{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu\} = \left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right\} + \frac{2\nu-1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) - \omega_{\mathfrak{C}_0}(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu).$$

Durch Vergleich mit (33) folgt

$$(36) \qquad \omega_{\mathfrak{C}_0}(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu) \leqq \left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right\}$$

Für $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}$ ist $\left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right\} = \{\mathfrak{K}^\nu\} = 0$ nach Voraussetzung. Für

spezielle Wahl von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ kann aber $\left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right\} > 0$ sein. Wir unterscheiden verschiedene Unterfälle;

a) Für ein $\nu \geqq 2$ sei

$$\left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right\} \geqq 2,$$

wenn $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ passend gewählt sind. Es sei

$$\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right) = \mathfrak{B}(\mathfrak{H}),$$

wo $\mathfrak{B}$ der Faktor der Klasse $\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right)$ und die Klasse $(\mathfrak{H})$ primitiv sein soll.

Wegen $\{\mathfrak{H}\} = \left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right\} \geqq 2$ kann der Faktor $\mathfrak{B}$ mit einem allgemeinen ganzen Divisor $\mathfrak{H}$ keinen gemeinsamen Teiler haben, so daß $(\mathfrak{B}, \mathfrak{H}) \geqq 0$ ist. Aus (32) folgt, da alle Primteiler des Büschels $\langle\mathfrak{C}\rangle$ dasselbe Geschlecht haben,

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{C}_0, \mathfrak{K}).$$

Die Primteiler $\mathfrak{C}$ des Büschels $\langle\mathfrak{C}\rangle$ lassen sich stetig ineinander überführen und daher können sich ihre Schnittpunktzahlen mit ganzen Divisoren nur stetig ändern. Da diese aber ganze Zahlen sind, können sie sich überhaupt nicht ändern. Also ist

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{C}_0, \mathfrak{B}), \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{C}_0, \mathfrak{H}).$$

Damit folgt nach (26) und (29)

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{H}, \mathfrak{B}\mathfrak{H}) = \left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu, \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right)$$

$$(37) \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{H}, \mathfrak{B}\mathfrak{H}) = (\mathfrak{K}^\nu, \mathfrak{K}^\nu) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{B}) + 2(\mathfrak{B}, \mathfrak{H}) + (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = 0$$

$$(38) \quad \left(\mathfrak{B}\mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right) = (\mathfrak{K}^\nu, \mathfrak{K}^\nu) = \nu\{(\mathfrak{B}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{H}, \mathfrak{K})\} = 0$$

$$(39) \quad \left(\mathfrak{B}, \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right) = \nu(\mathfrak{B}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{H})$$

$$(40) \quad \left(\mathfrak{B}_k, \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right) = \nu(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{H})$$

$$(41) \quad \left(\mathfrak{C}, \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}^\nu) = \nu(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{B}) + (\mathfrak{C}, \mathfrak{H}) > 0$$

$$(42) \quad \left(\mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right) = \nu(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{H}) + (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}).$$

Wegen $\{\mathfrak{H}\} \geqq 2$ geht durch jede Stelle des Körpers K mindestens ein ganzer Divisor $\mathfrak{H}$. Es gibt daher in $(\mathfrak{H})$ einen ganzen Divisor $\mathfrak{H}_0$, der mit $\mathfrak{C}$ einen Schnittpunkt hat. Wäre $(\mathfrak{C}, \mathfrak{H}) = 0$, also auch $(\mathfrak{C}, \mathfrak{H}_0) = 0$, so müßte $\mathfrak{H}_0$ durch $\mathfrak{C}$ teilbar sein, so daß

$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{C}\mathfrak{G}$, wo $\mathfrak{G}$ ganz ist. Dann aber wäre

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^r \sim \mathfrak{V}\mathfrak{H}_0 \sim \mathfrak{V}\mathfrak{C}\mathfrak{G}$$

und

$$\mathfrak{K}^r \sim \mathfrak{V}\mathfrak{C}_0\mathfrak{G},$$

so daß $\{\mathfrak{K}^r\} > 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist

$$(43) \qquad (\mathfrak{C}, \mathfrak{H}) > 0$$

und die Divisoren $\mathfrak{H}$ bestehen nicht aus Primteilern $\mathfrak{C}$.

Ist $(\mathfrak{V}, \mathfrak{K}) < 0$, so muß $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{K}) < 0$ sein für mindestens ein k, etwa für $k = 1$, so daß $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{K}) < 0$ ist. Dann folgt aus (40), daß $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}) < 0$, also auch $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_1) < 0$ ist. Das ist aber nicht möglich, da keine vollkommenen Primteiler vorhanden sind. Also ist

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{K}) \geqq 0.$$

Wegen (42) kann nicht $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) < 0$ sein. Denn dann müßte entweder $(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) < 0$ oder $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) < 0$ sein und beides ist nicht möglich, da $\{\mathfrak{H}\} \geqq 2$ und $(\mathfrak{H})$ primitiv ist. Wir können also $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) \geqq 0$ voraussetzen. Dann folgt aus (38) $(\mathfrak{V}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = 0$, aus (42) $(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = 0$ und aus (37) $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) = 0$. Es ist also

$$(44) \qquad (\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) = (\mathfrak{V}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = 0.$$

Wegen $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = 0$ bestehen die ganzen Divisoren $\mathfrak{H}$ aus den Primteilern eines Büschels $\langle \mathfrak{P} \rangle$. Es sei

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_r.$$

Wegen (44) ist $\pi(\mathfrak{H}) = 1$ und $\sigma(\mathfrak{H}) = 0$, d. h. ein allgemeiner ganzer Divisor aus $(\mathfrak{H})$ kann keine mehrfachen Stellen haben. Daher haben auch die $\mathfrak{P}$ aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$ i. a. keine mehrfachen Stellen und es ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = 0$. Dann folgt aus (44)

$$0 = (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{r} (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i\mathfrak{K}) = r\,(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\mathfrak{K}) = 2r\{\pi(\mathfrak{P}) - 1\}$$

und daher

$$\pi(\mathfrak{P}) = 1.$$

Wenden wir auf das Büschel $\langle \mathfrak{P} \rangle$ die Formel (4) der Zeuthen-Segreschen Invarianten an, so wird $\delta = 0$. Es darf daher kein Primteiler $\mathfrak{P}$ zerfallen und keiner eine mehrfache Stelle haben.

Das Büschel $\langle \mathfrak{P} \rangle$, das vom Büschel $\langle \mathfrak{C} \rangle$ verschieden ist, muß vom Geschlechte 0 sein. Denn der Körper k, dessen Stellen die Primteiler des Büschels $\langle \mathfrak{C} \rangle$ eineindeutig entsprechen, ist vom Geschlechte 1 und enthält ein Differential erster Gattung dr. Wäre der Körper k_1, dessen Stellen die Primteiler des Büschels $\langle \mathfrak{P} \rangle$ eineindeutig entsprechen vom Geschlechte $\pi(k_1) > 0$, so enthielte er mindestens ein Differential erster Gattung dr_1. k und k_1 sind Unterkörper von K und sie sind verschieden, da die Büschel $\langle \mathfrak{C} \rangle$ und $\langle \mathfrak{P} \rangle$ ver-

schieden sind. Dann sind dr und dr_1 verschiedene totale Differentiale erster Gattung des Körpers K und dann ist $drdr_1$ ein Doppeldifferential erster Gattung aus K, so daß $p_g > 0$ gegen die Voraussetzung.

Das Büschel $\langle \mathfrak{P} \rangle$ ist also vom Geschlechte 0 und deshalb sind je zwei der Primteiler $\mathfrak{P}_i$ äquivalent. Wir wählen irgend zwei Primteiler $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$, setzen

$$y = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2}$$

und nehmen y als zweite unabhängige Veränderliche in K. Jedem Wert von y entspricht dann ein und nur ein Primteiler $\mathfrak{P}$ aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$. Daher besteht die Gesamtheit aller Funktionen aus K, die algebraisch nur von y abhängen, aus den rationalen Funktionen von y.

Setzen wir $y = \bar{y}$ gleich einer Konstanten, so muß der dadurch aus K entstehende Körper $(x\xi; \bar{y}z)$ immer das Geschlecht 1 haben, da alle Primteiler $\mathfrak{P}$ vom Geschlechte 1 sind. Da schon der Körper $(x\xi)$ das Geschlecht 1 hat, darf der Körper $(x\xi; \bar{y}z)$ keine Relativverzweigung in bezug auf $(x\xi)$ haben. Also muß der Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_0$ für $y = \bar{y}$ konstant werden. Ist

$$\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{T}_1^{\mu_1 - 1} \mathfrak{T}_2^{\mu_2 - 1} \dots \mathfrak{T}_\alpha^{\mu_\alpha - 1},$$

so ist y für $\mathfrak{T}_i = 0$ konstant, etwa gleich b_i. Da jedem Werte von y nur ein Primteiler $\mathfrak{P}$ entspricht, so wird der Zähler von $y - b$ gleich $\mathfrak{P}$, wenn $b \neq b_i$ und $\mathfrak{P}$ dem Werte b entspricht, und gleich $\mathfrak{T}_i^{\mu_i}$, wenn $b = b_i$. Wir haben daher

$$y - b = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}, \text{ wenn } b \neq b_i,$$

$$y - b = \frac{\mathfrak{T}_i^{\mu_i}}{\mathfrak{M}}, \text{ also } \mathfrak{T}_i^{\mu_i} \sim \mathfrak{M}, \text{ wenn } b = b_i.$$

In diesem Falle ist

$$\mu_i (\mathfrak{L}, \mathfrak{T}) = (\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = n,$$

also μ_i ein Teiler von n. Ist $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\alpha]$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der μ_i, und ist $\mu(\mu_i - 1) = \mu_i \tau_i$, so wird

$$\mathfrak{Z}_0^{\mu} \sim \mathfrak{M}^{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_\alpha} \sim \mathfrak{M}^{\tau},$$

wenn wir $\tau = \Sigma \tau_i$ setzen. Nach (31) ist daher

$$\mathfrak{K}^{\mu} \sim \mathfrak{M}^{\tau - 2\mu}.$$

Da $\mathfrak{L} \sim \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$, $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = n$, so wird

$$2\mu (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{L}, \mathfrak{K}^{\mu}) = n(\tau - 2\mu).$$

Wegen $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) > 0$ ist $\tau - 2\mu > 0$ und

$$\{\mathfrak{K}^{\mu}\} = \{\mathfrak{M}^{\tau - 2\mu}\} > 0$$

im Widerspruch zur Annahme. Für kein $\nu \geqq 2$ ist daher $\left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0} \mathfrak{K}^{\nu}\right\} \geqq 2$, womit die Annahme a) erledigt ist.

b) Es sei für $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}_0$

(45) $\left\{\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}}\mathfrak{K}^\nu\right\} = 1$ für wenigstens ein $\nu \geqq 2$

und $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor aus $\left(\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}}\mathfrak{K}^\nu\right)$, so daß

$$\mathfrak{G} \sim \mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{K}^\nu.$$

Da für jedes $\mathfrak{C}$ aus $\langle \mathfrak{C} \rangle$, abgesehen natürlich von $\mathfrak{C}_0$, die Gleichung (45) gilt, so entspricht jedem $\mathfrak{C}$ ein ganzer Divisor $\mathfrak{G}$. Ist

$$\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}_i}\mathfrak{K}^\nu \sim \mathfrak{G}_i, \qquad i = 1, 2,$$

so ist $\mathfrak{G}_1 \sim \mathfrak{G}_2$, da sonst $\mathfrak{C}_1 \sim \mathfrak{C}_2$ wäre. Die $\mathfrak{G}$ können alle einen gemeinsamen Faktor $\mathfrak{B}$ haben. Wir setzen

(46) $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}\mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{G}_i = \mathfrak{B}\mathfrak{H}_i, \qquad \mathfrak{H}_1 \sim \mathfrak{H}_2.$

Da jeder Stelle von k ein Primteiler $\mathfrak{C}$ und jedem $\mathfrak{C}$ ein ganzer Divisor $\mathfrak{H}$ entspricht, so bilden die $\mathfrak{H}$ ein Büschel $\langle \mathfrak{H} \rangle$. Dies kann wegen (46) nicht rational sein. Da $p_g = 0$ ist, ist das Büschel $\langle \mathfrak{H} \rangle$ entweder identisch mit $\langle \mathfrak{C} \rangle$ oder jeder ganze Divisor $\mathfrak{H}$ besteht aus Primteilern $\mathfrak{C}$. Dann aber gibt es unter den ganzen Divisoren $\mathfrak{H}$ mindestens einen $\mathfrak{H}_0$, der durch $\mathfrak{C}_0$ teilbar ist. Ist $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{C}_0 \mathfrak{T}$, wo $\mathfrak{T}$ ganz, und ist $\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}}\mathfrak{K}^\nu \sim \mathfrak{H}_0$, so wird

$$\mathfrak{K}^\nu \sim \mathfrak{C}\mathfrak{T}, \text{ also } \{\mathfrak{K}^\nu\} > 0$$

gegen die Voraussetzung und damit ist auch die Annahme b) erledigt

c) Es sei

$$\left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\mathfrak{K}^\nu\right\} = 0 \text{ für } \nu \geqq 2,$$

wenn nicht $\mathfrak{C}$ passend zu $\mathfrak{C}_0$ gewählt ist.

Aus (36) folgt

(47) $$\omega_{\mathfrak{C}_0}(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu) = 0.$$

Nach (33) und (34) ist $\{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu\}_{\mathfrak{C}_0} > 0$. Es sei $\mathfrak{a}$ ein ganzer Divisor aus der Klasse $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu)_{\mathfrak{C}_0} = (\mathfrak{K}^\nu)_{\mathfrak{C}_0}$. Wegen (47) gibt es in $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu)$ einen ganzen Divisor $\mathfrak{G}$, der für $\mathfrak{C}_0 = 0$ in $\mathfrak{a}$ übergeht. Da das für fast alle $\mathfrak{C}$ gilt, so gibt es eine einfach unendliche Schar solcher ganzer Divisoren $\mathfrak{G}$, deren jeder einem $\mathfrak{C}$ entspricht. Unter diesen gibt es dann mindestens einen, der mit $\mathfrak{C}_0$ noch einen Schnittpunkt hat und daher durch $\mathfrak{C}_0$ teilbar sein muß. Diesen bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{C}_0 \mathfrak{H}_0$. Das zugehörige $\mathfrak{C}$ sei $\mathfrak{C}_0'$. Es wird dann

(48) $$\mathfrak{C}_0' \mathfrak{K}^\nu \sim \mathfrak{C}_0 \mathfrak{H}_0.$$

In dieser Weise gibt es zu jedem Primteiler $\mathfrak{C}$ aus $\langle \mathfrak{C} \rangle$ (mindestens) einen Primteiler $\mathfrak{C}'$ und einen ganzen Divisor $\mathfrak{H}$, so daß

(49) $$\mathfrak{C}' \mathfrak{K}^\nu \sim \mathfrak{C}\mathfrak{H}.$$

Es sei $\mathfrak{C}_1$ irgend ein Primteiler aus $\langle\mathfrak{C}\rangle$. Die den Primteilern $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}_1$ in k entsprechenden Primteiler seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}_1$. Ferner sei $\mathfrak{p}_1'$ so bestimmt, daß

$$(50) \qquad \frac{\mathfrak{p}_1'}{\mathfrak{p}'} \sim \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}}, \qquad \text{also } \frac{\mathfrak{C}_1'}{\mathfrak{C}'} \sim \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}}$$

ist, wenn $\mathfrak{C}_1'$ dem Primteiler $\mathfrak{p}_1'$ entspricht. Hierdurch ist $\mathfrak{p}_1'$ und also auch $\mathfrak{C}_1'$ eindeutig bestimmt. Aus (49) und (50) folgt

$$(51) \qquad \frac{\mathfrak{C}_1'}{\mathfrak{C}'}\mathfrak{C}'\mathfrak{K}^\nu \sim \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}\mathfrak{H} \text{ oder } \mathfrak{C}_1'\mathfrak{K}^\nu \sim \mathfrak{C}_1\mathfrak{H},$$

so daß $\mathfrak{C}_1'$ der $\mathfrak{C}_1$ zugeordnete Primteiler ist. Es gibt also zu jedem $\mathfrak{C}$ einen eindeutig bestimmten Primteiler $\mathfrak{C}'$, so daß (51) gilt. Dabei ist der ganze Divisor $\mathfrak{H}$ immer derselbe.

Es sei

$$K \equiv (x\xi; yz)$$

und der Körper werde definiert durch die Gleichung

$$f(x, \xi; y, z) = 0,$$

die in z vom Grade n sei. Da ξ^2 eine rationale Funktion von x ist, läßt sich jede Funktion R aus K in der Form schreiben

$$R \equiv (a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}) + \xi(b_0 + b_1 z + \ldots + b_{n-1} z^{n-1})$$

$$R \equiv A + \xi B,$$

wo die a_k, b_k rational in x und y sind. Wir setzen

$$\bar{R} = A - \xi B$$

und nennen R und $\bar{R}$ zueinander konjungiert.

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Bei $K \to [\mathfrak{P}]$ werde x, und wegen (27) auch ξ konstant. Es ist dann $\mathfrak{P}$ einer der Primteiler $\mathfrak{C}$. Jedem Werte a von x entsprechen zwei Werte von ξ, wenn $a \neq a_i$, sonst der eine Wert 0. Die $x = a$ entsprechenden Primteiler $\mathfrak{C}$ seien mit $\mathfrak{C}_a$ und $\bar{\mathfrak{C}}_a$ bezeichnet und zueinander konjugiert. $x = a_i$ entspreche $\mathfrak{W}_i$. Die $\mathfrak{W}_i$ sind zu sich selbst konjugiert: $\bar{\mathfrak{W}}_i = \mathfrak{W}_i$. Es ist

$$x - a = \frac{\mathfrak{C}_a \bar{\mathfrak{C}}_a}{\mathfrak{C}_\infty \bar{\mathfrak{C}}_\infty} \qquad x - a_i = \frac{\mathfrak{W}_i^2}{\mathfrak{C}_\infty \bar{\mathfrak{C}}_\infty}$$

$$\mathfrak{L}_a = \mathfrak{C}_a \bar{\mathfrak{C}}_a, \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{C}_\infty \bar{\mathfrak{C}}_\infty, \quad \mathfrak{C}_a \bar{\mathfrak{C}}_a \sim \mathfrak{W}_i^2 \sim \mathfrak{L}.$$

Diese Primteiler liefern zu $\mathfrak{Z}_0$ keinen Beitrag.

2. Bei $K \to [\mathfrak{P}]$ bleibe x und also auch ξ veränderlich. Der Körper $[\mathfrak{P}]$ enthält dann den Körper $(x\xi)$ als Teilkörper. Es gelte $y \to \eta$, $z \to \zeta$. Da $[\mathfrak{P}] \equiv (x\xi; \eta\zeta)$ ein Oberkörper von $(x\xi)$ und ein Körper einer unabhängigen Veränderlichen ist, so genügen η und ζ Gleichungen

$$\varphi(x, \xi; \eta) = 0, \qquad \psi(x, \xi; \zeta) = 0.$$

Es können η und ζ auch konstant sein. Bei $K \to [\mathfrak{P}]$ bleibt x ungeändert und ξ geht in ξ oder $-\xi$ über. Es gibt also zwei solche Abbildungen und die beiden Abbildungen definieren zwei Primteiler, die mit $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ bezeichnet seien:

$$x \to x,\ \xi \to \xi,\ y \to \eta,\ z \to \zeta \text{ definiere } \mathfrak{P},$$
$$x \to x,\ \xi \to -\xi,\ y \to \eta,\ z \to \zeta \text{ definiere } \overline{\mathfrak{P}}.$$

Wir nennen $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ zueinander konjugiert.

Bei $K \to [\mathfrak{P}]$ gilt

$$R = A(x, y) + \xi B(x, y) \to A(\eta, \zeta) + \xi B(\eta, \zeta),$$
$$\overline{R} = A(x, y) - \xi B(x, y) \to A(\eta, \zeta) - \xi B(\eta, \zeta),$$

und bei $K \to [\overline{\mathfrak{P}}]$ gilt

$$R = A(x, y) + \xi B(x, y) \to A(\eta, \zeta) - \xi B(\eta, \zeta),$$
$$\overline{R} = A(x, y) - \xi B(x, y) \to A(\eta, \zeta) + \xi B(\eta, \zeta).$$

Ist also R durch $\mathfrak{P}^\lambda$, so ist $\overline{R}$ durch $\overline{\mathfrak{P}}^\lambda$ teilbar. $\mathfrak{P}$ kann mit $\overline{\mathfrak{P}}$ identisch sein und es ist dann und nur dann $\mathfrak{P} \equiv \overline{\mathfrak{P}}$, wenn aus

$$A(\eta, \zeta) + \xi B(\eta, \zeta) \equiv 0$$

immer folgt

$$A(\eta, \zeta) - \xi B(\eta, \zeta) \equiv 0.$$

Wenn $f(x, \xi; y, z)$ für jeden konstanten Wert von y rational in x, ξ, z zerfällt, dann enthält K einen Unterkörper k', dessen Funktionen nur von y abhängen und der größer ist als der Körper der rationalen Funktionen von y. Wäre das Geschlecht dieses Körpers k' größer als 0, so enthielte K ein zweites Büschel vom Geschlechte größer als 0 von Primteilern. Dann wäre aber $p_g > 0$. Daher hat k' das Geschlecht 0, und wir können anstelle von y eine Funktion erster Ordnung aus k' als zweite unabhängige Veränderliche wählen. Bezeichnen wir diese wieder mit y, so enthält K nur die rationalen Funktionen von y als Funktionen, die nur von y abhängen und f zerfällt nicht für (nicht speziell gewähltes) konstantes y. Die Abbildung $y \to b$ liefert also einen Primteiler und nur einen, etwa $\mathfrak{M}_b$. Daher wird $\overline{\mathfrak{M}}_b = \mathfrak{M}_b$ und

$$\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}. \tag{52}$$

Es sei ϱ eine Funktion aus K, die $\mathfrak{P}$ in der ersten Potenz enthält und die $\overline{\mathfrak{P}}$ nicht enthält, wenn $\mathfrak{P} \neq \overline{\mathfrak{P}}$. Ferner sei $P(x, y)$ durch $\mathfrak{P}$ teilbar, und es enthalte P den Primteiler $\mathfrak{P}$ genau in der Potenz λ. Dann ist bei $K \to [\mathfrak{P}]$

$$\frac{P(x, y)}{\varrho^\lambda} \to e.$$

Ist $\mathfrak{P} \neq \overline{\mathfrak{P}}$, so enthält $\overline{\varrho}$ den Primteiler $\overline{\mathfrak{P}}$ in der ersten Potenz

und $\mathfrak{P}$ nicht. Da P als rationale Funktion von x, y mit ihrer konjugierten Funktion $\overline{P}$ identisch ist, so wird bei $K \to [\overline{\mathfrak{P}}]$

$$\frac{P(x,y)}{\varrho^{\lambda}} \to e.$$

Daher enthält P die Primteiler $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ immer in derselben Potenz.

Es sei nun $\mathfrak{P}$ irgend ein Verzweigungsprimteiler, der, gleich 0 gesetzt, x nicht zu einer Konstanten macht. Da Punktprimteiler nicht vorhanden sind, so ist die Idealnorm von $\mathfrak{P}$ eine ganze rationale Funktion $P(x, y)$ von x, y. Dann ist $P(x, y)$ durch eine Poten größer als 1 von $\mathfrak{P}$ teilbar und, da $\overline{P} \equiv P$, auch durch dieselbe Potenz von $\overline{\mathfrak{P}}$. Daher ist auch $\overline{\mathfrak{P}}$ Verzweigungsprimteiler von derselben Verzweigungsordnung wie $\mathfrak{P}$. Das Produkt dieser Verzweigungsprimteiler ergibt den Divisor $\mathfrak{Z}_0$. Bezeichnen wir seinen konjugierten mit $\overline{\mathfrak{Z}}_0$, so ist, da mit $\mathfrak{P}^{\alpha}$ auch $\overline{\mathfrak{P}}^{\alpha}$ in $\mathfrak{Z}_0$ aufgenommen wird,

$$\overline{\mathfrak{Z}}_0 = \mathfrak{Z}_0. \tag{53}$$

Wegen (52), (53) wird

$$\mathfrak{K} \sim \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{M}^{-2} = \overline{\mathfrak{Z}}_0 \overline{\mathfrak{M}}^{-2} \sim \overline{\mathfrak{K}}.$$

Ist nun nach (51) $\mathfrak{C}_1' \mathfrak{K}^{\nu} \sim \mathfrak{C}_1 \mathfrak{H}$, wo $\mathfrak{H}$ ganz ist, so folgt

$$\overline{\mathfrak{C}}_1' \overline{\mathfrak{K}}^{\nu} \sim \overline{\mathfrak{C}}_1' \mathfrak{K}^{\nu} \sim \overline{\mathfrak{C}}_1 \overline{\mathfrak{H}}$$

und durch Multiplikation

$$\mathfrak{C}_1' \overline{\mathfrak{C}}_1' \mathfrak{K}^{2\nu} \sim \mathfrak{C}_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 \mathfrak{H} \overline{\mathfrak{H}}.$$

Wegen $\mathfrak{C}_1' \overline{\mathfrak{C}}_1' \sim \mathfrak{C}_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 \sim \mathfrak{L}$ wird $\mathfrak{K}^{2\nu} \sim \mathfrak{H} \overline{\mathfrak{H}}$, also gegen die Annahme

$$\{\mathfrak{K}^{2\nu}\} > 0.$$

Es ergibt sich also auch hier ein Widerspruch und damit ist der Fall I, nämlich der Fall $\pi = \pi(\mathfrak{C}) > 1$, erledigt.

Fall II: Es sei $\pi = 1$.

Da alle Primteiler $\mathfrak{C}$ des Büschels $\langle \mathfrak{C} \rangle$ dasselbe Geschlecht haben, darf der Modul der Körper $[\mathfrak{C}]$ nicht von x abhängen. Denn da er algebraisch von x abhängen würde, so müßte er für mindestens einen Wert von x Null werden. Der zu einem solchen Wert von x gehörende Primteiler $\mathfrak{C}$ hätte dann aber das Geschlecht 0, was nicht möglich ist, da alle Primteiler des Büschels $\langle \mathfrak{C} \rangle$ dasselbe Geschlecht haben. Der Modul ist also konstant und daher sind die $[\mathfrak{C}]$ alle birational ineinander transformierbar.

Es sei K definiert durch

$$f(x, \xi; y, z) = 0.$$

Zu jedem Wertepaar (x, ξ) gehört ein Primteiler $\mathfrak{C}$ des Büschels $\langle \mathfrak{C} \rangle$. Dann sind die Körper (yz) und $(\eta\zeta)$, die durch

$$f(x_1, \xi_1; y, z) = 0 \quad \text{und} \quad f(x_2, \xi_2; \eta, \zeta) = 0$$

definiert sind, birational ineinander transformierbar, wobei x_1, ξ_1 und

x_2, ξ_2 als Parameter zu betrachten sind. Die Transformationsformeln brauchen in diesen Parametern nicht algebraisch zu sein, aber es gibt immer Transformationsformeln, die es sind.

Es seien die Transformationsformeln algebraisch in x, ξ. Die Koeffizienten mögen dem Körper $(x\xi\vartheta)$ angehören, wo ϑ durch eine Gleichung vom Grade μ mit Koeffizienten aus $(x\xi)$ definiert sei. Es sei

$$y = g(x, \xi, \vartheta; \eta, \zeta), \qquad z = h(x, \xi, \vartheta; \eta, \zeta),$$
$$\eta = \bar{g}(x, \xi, \vartheta; y, z), \qquad \zeta = \bar{h}(x, \xi, \vartheta; y, z).$$

Der Körper $(x\xi\vartheta; \eta\zeta)$ enthält also die Funktionen y, z und der Körper $(x\xi\vartheta; yz)$ die Funktionen η, ζ; daher sind die beiden Körper miteinander identisch. Wir bezeichnen diesen Körper mit $\bar{K}$. Er ist ein Körper vom Relativgrad μ über K. Es kann nicht $\mu = 1$ sein, denn dann wäre $\bar{K} = K = (x\xi; \eta\zeta)$, es wäre K aus den beiden Körpern einer Veränderlichen $(x\xi)$ und $(\eta\zeta)$ zusammengesetzt, die beide das Geschlecht 1 haben und dann wäre $p_g = 1$ im Widerspruch zur Annahme.

Jeder Stelle (η_0, ζ_0) von $(\eta\zeta)$ entspricht in $\bar{K}$ ein Primteiler $\bar{\mathfrak{P}}$. Der Körper $[\bar{\mathfrak{P}}]$ ist $(x\xi\vartheta; \eta_0\zeta_0)$. Wir erhalten so ein Büschel $\langle\bar{\mathfrak{P}}\rangle$ in $\bar{K}$. Bei der Abbildung $\bar{K} \to [\bar{\mathfrak{P}}]$ wird aber jeder Unterkörper von $\bar{K}$ auch auf einen algebraischen Körper einer Veränderlichen abgebildet. Also K etwa auf $[\mathfrak{P}]$, wo $[\mathfrak{P}]$ ein Unterkörper von $[\bar{\mathfrak{P}}]$ ist. Der Körper $[\mathfrak{P}]$ ist der Körper

$$[\mathfrak{P}] = (x\xi; yz), \text{ wenn } y = g(x, \xi, \vartheta; \eta_0, \zeta_0),\ z = h(x, \xi, \vartheta; \eta_0, \zeta_0).$$

Wenn wir also ϑ nicht unnötig kompliziert gewählt haben, ist

$$[\mathfrak{P}] = (x\xi\vartheta\eta_0\zeta_0) = [\bar{\mathfrak{P}}].$$

Es geht daher auch durch jede Stelle von K ein und nur ein Primteiler $\mathfrak{P}$. Somit haben wir auch in K ein Büschel $\langle\mathfrak{P}\rangle$ von Primteilern $\mathfrak{P}$. Da $p_g = 0$ ist, muß $\langle\mathfrak{P}\rangle$ rational sein. Sind also $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei Primteiler aus $\langle\mathfrak{P}\rangle$, so ist

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2} = R(x, \xi; y, z)$$

eine Funktion aus K. Da für $R = \text{const.}$ die Größen η und ζ konstant sind, so kann R als Funktion von η, ζ allein dargestellt werden. Da ferner jeder Stelle (η, ζ) ein und nur ein Primteiler $\mathfrak{P}$ entspricht, muß R eine rationale Funktion von η, ζ sein:

$$R(x, \xi; y, z) = R_0(\eta, \zeta).$$

Lassen wir x, ξ nach x_0, ξ_0 gehen, so geht y, z nach η, ζ. Da sich dabei $R_0(\eta, \zeta)$ nicht ändert, so ist

$$R(x_0, \xi_0, \eta, \zeta) = R_0(\eta, \zeta).$$

Wir haben daher

$$R(x, \xi; y, z) \equiv R(x_0, \xi_0, \eta, \zeta),$$

so daß R eine Funktion ist, die beim Übergang von (yz) zu $(\eta\zeta)$ in sich übergeht. Wir wählen diese Funktion als zweite unabhängige Veränderliche y in K. Dann ist $y \equiv \eta$.

Es sind also die durch

$$f(x, \xi, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad f(x_0, \xi_0, y, \zeta) = 0$$

definierten Körper (yz) und $(y\zeta)$ miteinander identisch und daher müssen auch die zu den Körpern gehörenden über der y-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Flächen identisch sein. Die Verzweigungspunkte liegen also fest, sind von x unabhängig, da das beim Körper $(y\zeta)$ der Fall ist. Daher hat der Körper K in bezug auf x, y einen Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}$, der nur Verzweigungsprimteiler enthält, längs deren entweder x oder y konstant wird, die also entweder $\langle \mathfrak{C} \rangle$ oder $\langle \mathfrak{P} \rangle$ angehören. Wie wir bei (30) gesehen haben, kann K als Verzweigungsprimteiler, die $\langle \mathfrak{C} \rangle$ angehören, nur die Primteiler $\mathfrak{W}_1, \ldots, \mathfrak{W}_4$ haben. Es ist also

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{W}\mathfrak{Z}_0,$$

wo $\mathfrak{Z}_0$ aus Primteilern $\mathfrak{P}$ besteht. Es wird wegen $\mathfrak{W} \sim \mathfrak{L}^2$

$$\mathfrak{K} \sim \mathfrak{W}\mathfrak{Z}_0\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2} \sim \mathfrak{Z}_0\mathfrak{M}^{-2} \sim \mathfrak{Z}_0\mathfrak{P}^{-2}.$$

Da $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = 0$ ist, so wird auch $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) = 0$ und daher ist $\pi(\mathfrak{P}) = 1$.

Es enthält daher K ein rationales Büschel $\langle \mathfrak{P} \rangle$ von Primteilern $\mathfrak{P}$ vom Geschlechte 1. Wie in Fall I folgt gegen die Annahme $\{\mathfrak{K}^\mu\} > 0$ für ein passendes $\mu > 0$. Daher kann der Fall $\pi(\mathfrak{C}) = 1$ auch nicht eintreten.

Es bleibt, wie behauptet, nur die Möglichkeit $\pi(\mathfrak{C}) = 0$, d. h. aber, es ist K halbrational.

VI. Einige Hilfssätze.

Der Beweis des Hauptsatzes über halbrationale Körper für den Fall $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$ erfordert noch einige vorbereitende Betrachtungen über die mehrfach adjungierten Klassen $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu)$ zu einer primitiven Divisorenklasse $(\mathfrak{C})$ von der Dimension $\{\mathfrak{C}\} \geqq 4$.

Die Klasse $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu)$ sei von der Dimension $\{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu\} \geqq 2$. Sie kann imprimitiv sein, ihre feste Komponente sei $\mathfrak{V}$ und es sei

$$(54) \qquad (\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu) = \mathfrak{V}(\mathfrak{H}), \quad \mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1^{h_1}\mathfrak{V}_2^{h_2}\ldots\mathfrak{V}_r^{h_r}, \{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu\} \geqq 2.$$

Der Faktor $\mathfrak{V}$ sei so gewählt, daß die Klasse $(\mathfrak{H})$ primitiv ist, die h_α seien positive ganze Zahlen und die $\mathfrak{V}_\alpha$ seien voneinander verschiedene

Primteiler. Dann ist

$$(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}_k) \geqq 0 \text{ für } i \neq k. \tag{55}$$

Für unsere Beweisführung ist die Restklasse $(\mathfrak{H})$ von besonderer Bedeutung. Wir bezeichnen mit $\overline{\pi}(\mathfrak{V}\mathfrak{H})$ und $\overline{\pi}(\mathfrak{H})$ das Geschlecht der Klassen $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^r) = (\mathfrak{V}\mathfrak{H})$ und $(\mathfrak{H})$ und zeigen, daß

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta &= 2\overline{\pi}(\mathfrak{V}\mathfrak{H}) - 2\overline{\pi}(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{V}\mathfrak{H}, \mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{K}) - (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) \\ &= (\mathfrak{V}, \mathfrak{V}\mathfrak{K}) + 2(\mathfrak{V}, \mathfrak{H}) \geqq 0. \end{aligned} \right. \tag{56}$$

Bei der Untersuchung des Faktors $\mathfrak{V}$ kann sich ergeben, daß K rational oder halbrational ist. Dann ist der Hauptsatz über halbrationale Körper bewiesen und wir können und wollen dann diese Fälle von den weiteren Betrachtungen ausschließen. Ebenso wollen wir annehmen, daß der Körper keine vollkommenen Primteiler enthält, da wir diese Betrachtungen nur für den Fall $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$ verwenden werden.

Da eine feste Komponente die Dimension einer Klasse nicht ändert, ist nach (54)

$$\{\mathfrak{C}\mathfrak{K}^r\} = \{\mathfrak{H}\} \geqq 2. \tag{57}$$

Nicht jeder ganze Divisor der primitiven Klasse $(\mathfrak{C})$ von der Dimension $\{\mathfrak{C}\} \geqq 4$ kann einen Primteiler $\mathfrak{V}_\alpha$ enthalten. Daher ist

$$(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{C}) \geqq 0 \text{ für } \alpha = 1, 2, \ldots, r. \tag{58}$$

Wir setzen nach der Definitionsgleichung für das Geschlecht eines Primteilers

$$(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha\mathfrak{K}) = 2\pi(\mathfrak{V}_\alpha) - 2 + 2\sigma(\mathfrak{V}_\alpha) = 2(\varrho_\alpha - 1) \geqq -2 \tag{59}$$

und teilen die Primteiler $\mathfrak{V}_\alpha$ in zwei Arten. Es sei

$$\left\{ \begin{aligned} &(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H}) = 0 \text{ für } \alpha = 1, \ldots, \lambda, \\ &(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H}) \geqq 1 \text{ für } \alpha = \lambda + 1, \ldots, r. \end{aligned} \right. \tag{60}$$

Nach (54) und (56) wird

$$\begin{aligned} \Delta &= \Sigma h_\alpha (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}) + \Sigma h_\alpha (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{K}) + 2\Sigma h_\alpha (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H}) \\ &= \Sigma h_\alpha \{(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha\mathfrak{K}) - (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) + (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}) + 2(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H})\}. \end{aligned}$$

Wir zerlegen Δ in zwei Summanden

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \tag{61}$$

wo nach (59) und (60)

$$\Delta_1 = \sum_1^\lambda h_\alpha \delta_\alpha = \sum_1^\lambda h_\alpha \{(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}) + (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{K})\}, \tag{62}$$

$$\Delta_2 = \sum_{\lambda+1}^r h_\alpha \delta_\alpha = \sum_{\lambda+1}^r h_\alpha \{2(\varrho_\alpha - 1) - (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) + (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}) + 2(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H})\} \tag{63}$$

sein soll.

Aus (54) und (60) folgt

$$(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}) = (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu \mathfrak{H}^{-1})$$

$$(64) \quad (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}) = (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{C}) + \nu(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{K}) \text{ für } \alpha = 1, \ldots, \lambda.$$

Für mindestens ein $\alpha \leqq \lambda$, etwa für $\alpha = 1$, sei nun $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}) < 0$. Dann folgt aus (54) und (55) $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_1) < 0$ und aus (58) und (64) $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{K}) < 0$. Da keine vollkommenen Primteiler vorhanden sein sollen, können wir diesen Fall ausschließen und im folgenden voraussetzen

$$(65) \qquad (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}) \geqq 0 \text{ für } \alpha = 1, \ldots, \lambda.$$

Wegen (57) geht durch jede Stelle des Körpers K mindestens ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{H})$ und daher gibt es einen ganzen Divisor $\mathfrak{H}_0 \sim \mathfrak{H}$, der mit einem Primteiler $\mathfrak{V}_\alpha$ für $\alpha = 1, \ldots, \lambda$ eine Stelle gemeinsam hat. Da ein allgemeiner Divisor $\mathfrak{H}$ nach (60) den Primteiler $\mathfrak{V}_\alpha$ nicht treffen darf, muß $\mathfrak{V}_\alpha$ in $\mathfrak{H}_0$ als Faktor enthalten sein. Es sei $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{V}_\alpha^{g_\alpha} \mathfrak{A}$, wo $\mathfrak{A}$ nicht mehr durch $\mathfrak{V}_\alpha$ teilbar sein soll, so daß $(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}_\alpha) \geqq 0$ ist.

Zerfallen nicht alle ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H})$, so ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}_\alpha) > 0$, da beim Zerfallen aus Stetigkeitsgründen mehrfache Stellen auftreten müssen, und daher ist

$$g_\alpha (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) = (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H}) - (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{A}) = -(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{A}) < 0.$$

Da keine vollkommenen Primteiler vorhanden sein sollen, können wir annehmen

$$(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{K}) \geqq 0 \text{ für } \alpha = 1, \ldots, \lambda.$$

Dann folgt aus (62) und (65) $\delta_\alpha \geqq 0$ für $\alpha = 1, \ldots, \lambda$ und aus (62)

$$(66) \qquad \Delta_1 \geqq 0.$$

Zerfallen alle ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H})$, so besteht jeder von ihnen aus den Primteilern eines Büschels $\langle \mathfrak{P} \rangle$. Es sei etwa

$$\mathfrak{H} \sim \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_s.$$

Entweder ist $\mathfrak{V}_\alpha$ Teiler eines $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{V}_\alpha$ ist selbst ein $\mathfrak{P}$. Im ersten Falle folgt wieder $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) < 0$ und dann wie oben $\Delta_1 \geqq 0$. Es sei also $\mathfrak{V}_\alpha$ einer der Primteiler $\mathfrak{P}$. Da $\mathfrak{V}_\alpha$ Teiler der Klasse $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu)$ ist, muß $\{\mathfrak{V}_\alpha\} = 1$ sein und daher kann das Geschlecht des Büschels nicht 0 sein. Da $\mathfrak{V}_\alpha$ Primteiler eines irrationalen Büschels ist, ist

$$(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = 0 \text{ für } \alpha = 1, \ldots, \lambda.$$

Ist nun

$$(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{K}) \geqq 0 \text{ für } \alpha = 1, \ldots, \lambda,$$

so folgt wieder aus (62) und (65) $\delta_\alpha \geqq 0$ für $\alpha = 1, \ldots, \lambda$ und aus (62)

$$(67) \qquad \Delta_1 \geqq 0.$$

Ist $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{K}) < 0$ für mindestens ein $\alpha \leqq \lambda$, etwa für $\alpha = 1$, so folgt nach (59)

$$(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_1 \mathfrak{K}) = 2\pi(\mathfrak{V}_1) - 2 + 2\sigma(\mathfrak{V}_1) < 0,$$

also $\pi(\mathfrak{V}_1) = \sigma(\mathfrak{V}_1) = 0$. Das Geschlecht eines allgemeinen Primteilers des Büschels $\langle \mathfrak{V}_1 \rangle$ ist also 0 und dann ist der Körper K nach M. Noether halbrational. Da für diesen Fall der zu beweisende Hauptsatz über halbrationale Körper richtig ist und da wir diese Überlegungen nur für den Beweis dieses Satzes anstellen, schließen wir diesen Fall im folgenden aus.

Zur Berechnung von Δ_2 setzen wir nach (63)

$$\delta_\alpha = 2(\varrho_\alpha - 1) - (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) + (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}) + 2(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H}). \tag{68}$$

Aus (54) und (59) folgt

$$\begin{aligned}(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H}) &= (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu \mathfrak{V}^{-1}) \\ &= (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{C}) + \nu(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha \mathfrak{K}) - \nu(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) - (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V})\end{aligned}$$

und, wenn wir in (68) für ein $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H})$ diesen Wert einsetzen,

$$\delta_\alpha = (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{C}) + (\nu + 1)\{2(\varrho_\alpha - 1) - (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha)\} + (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H}). \tag{69}$$

Wir unterscheiden die beiden Fälle $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) \geqq 0$ und $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) < 0$.

Es sei $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) \geqq 0$. Wir setzen $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_\alpha^{h_\alpha} \mathfrak{V}'$, wo $\mathfrak{V}'$ nicht mehr den Faktor $\mathfrak{V}_\alpha$ enthalten soll, so daß $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}') \geqq 0$ ist. Wegen $h_\alpha \geqq 1$ wird

$$(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}) - (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) = (h_\alpha - 1)(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) + (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}') \geqq 0.$$

Aus $\varrho_\alpha \geqq 0$ und $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H}) \geqq 1$ folgt ferner

$$\varrho_\alpha - 1 + (\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{H}) \geqq 0,$$

so daß nach (68) $\delta_\alpha = 0$ wird.

Es sei $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) < 0$. Nach (69) kann $\delta_\alpha < 0$ nur sein, wenn $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) = -1$ und $\varrho_\alpha = 0$, d. h. $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha \mathfrak{K}) = -2$ ist. Dann ist aber auch $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{K}) = -1$ und diesen Fall können wir ausschließen, da nicht gleichzeitig $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) < 0$, $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{K}) < 0$ sein kann. Also ist $\delta_\alpha \geqq 0$ für $\alpha = \lambda + 1, \ldots, r$, daher nach (63) $\Delta_2 \geqq 0$ und nach (61), (66), (67)

$$\Delta \geqq 0,$$

d. h. nach (56)

$$\bar{\pi}(\mathfrak{V}\mathfrak{H}) = \bar{\pi}(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu) \geqq \bar{\pi}(\mathfrak{H}). \tag{70}$$

Damit haben wir den

Hilfssatz 1:

Die mehrfach adjungierten Klassen $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^\nu)$ zu einer primitiven Klasse $(\mathfrak{C})$ mit $\{\mathfrak{C}\} \geqq 4$ können imprimitiv sein. Enthält der Körper keine vollkommenen Primteiler und spalten wir die festen Kompo-

nenten von der Klasse $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^{\nu})$ ab, so ergibt sich entweder, daß der Körper halbrational ist, oder es kann das Geschlecht der primitiven Restklasse $(\mathfrak{H})$ nicht größer sein als das Geschlecht der Klasse $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^{\nu})$*).

Hat eine Divisorenklasse $(\mathfrak{G})$ von der Dimension $\{\mathfrak{G}\} = r + 1 > 1$ keine allen ihren ganzen Divisoren gemeinsame feste Komponente und zerfallen alle ganzen Divisoren $\mathfrak{G}$, so können sie ganz allgemein nur in die Divisoren eines Büschels zerfallen. Das Büschel bezeichnen wir mit $\langle \mathfrak{A} \rangle$. Durch jede Stelle des Körpers K geht dann mit Ausnahme der endlich vielen festen Stellen des Büschels ein und nur ein Primteiler oder ganzer Divisor $\mathfrak{A}$. Wir können also i. a. jeder Stelle von K einen eindeutig bestimmten Primteiler $\mathfrak{A}$ des Büschels $\langle \mathfrak{A} \rangle$ zuordnen. Wenn ein Divisor $\mathfrak{G}$ der Klasse $(\mathfrak{G})$ durch eine Stelle S von K geht, so muß er den zur Stelle S gehörenden Primteiler $\mathfrak{A}$ als Faktor enthalten.

Ist $\{\mathfrak{G}\} = r + 1 > 1$, so läßt sich immer ein ganzer Divisor $\mathfrak{G}$ der Klasse $(\mathfrak{G})$ finden, der durch r beliebig vorgegebene Stellen von K geht. Denn jede Bedingung, die wir den ganzen Divisoren einer Klasse auferlegen, erniedrigt die Zahl der linear unabhängig bleibenden ganzen Divisoren der Klasse um 1. Legen wir den ganzen Divisoren $\mathfrak{G}$ die Bedingung auf, durch r Stellen zu gehen, so bleiben $r + 1 - r = 1$ linear unabhängig, d. h. es gibt genau einen ganzen Divisor $\mathfrak{G}$, der durch r beliebig vorgegebene Stellen von K geht.

Zu diesen r Stellen des Körpers K gehören r Primteiler des Büschels $\langle \mathfrak{A} \rangle$, die wir wegen der Freiheit in der Wahl der r Stellen als voneinander verschieden annehmen können. Der Divisor $\mathfrak{G}$ der Klasse $(\mathfrak{G})$, der durch die r beliebig vorgegebenen Stellen von K geht, muß dann die zu den r Stellen gehörenden Divisoren $\mathfrak{A}$ als Faktoren enthalten. Damit haben wir den

Hilfssatz 2:

Wenn alle ganzen Divisoren einer primitiven Klasse $(\mathfrak{G})$ mit $\{\mathfrak{G}\} = r + 1 > 1$ zerfallen, so zerfällt jeder von ihnen in mindestens r Divisoren $\mathfrak{A}$ eines Büschels $\langle \mathfrak{A} \rangle$. (Lit.-Verz. 6, § 11).

Hilfssatz 3:

Gibt es in einem algebraischen Körper K für jede Klasse $(\mathfrak{Q})$ eine Zahl $\alpha_0 > 0$, so daß $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}\} = 0$ ist für alle $\alpha \geqq \alpha_0$, ist $(\mathfrak{Q})$ eine Divisorenklasse mit $\{\mathfrak{Q}\} \geqq 2$ und $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}\} \geqq 2$ und ist die Zahl α so gewählt, daß

$$\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}\} \geqq 2 \text{ und } \{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha+1}\} \leqq 1,$$

*) G. Castelnuovo und F. Enriques zeigen (Lit.-Verz. 3, Nr. 10), daß die Klassen $(\mathfrak{C}\mathfrak{K}^{\nu})$ als feste Komponenten, die mit den Divisoren der primitiven Restklasse keine Schnittpunkte haben, nur vollkommene Primteiler haben können. Wie aus unserem Beweis hervorgeht, braucht das nicht notwendig der Fall zu sein. Allerdings behalten die Folgerungen, die G. Castelnuovo und F. Enriques aus diesem Satze ziehen, ihre Gültigkeit, wie wir noch sehen werden.

dann gilt für das Geschlecht der Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha)$ die Ungleichung (Lit.-Verz. 3, Nr. 13.)

$$\pi_a = \bar{\pi}(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha) \leqq -p_a + 1.$$

Nach der Definition des Geschlechtes einer Klasse ist

$$\bar{\pi}(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha) = 1 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha, \mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha+1}).$$

Aus der Voraussetzung $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha+1}\} \leqq 1$ und aus dem Riemann-Rochschen Satze folgt für $\alpha \geqq \alpha_0$

$$1 \geqq \{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha+1}\} \geqq p_a + 1 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha+1}, \mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha) = p_a + 1 + \bar{\pi}(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha) - 1,$$

also die Behauptung

$$\pi_a = \bar{\pi}(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha) \leqq -p_a + 1.$$

VII. Beweis des Hauptsatzes über halbrationale Körper für den Fall $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$.

Wir beweisen nun den Hauptsatz über halbrationale Körper für den Fall $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$, indem wir zeigen, daß ein algebraischer Körper K rational oder halbrational ist, wenn in ihm das Verfahren der wiederholten Adjunktion zu Klassen von der Dimension 0 führt; denn nach IV können wir irgend eine der drei gleichwertigen Annahmen (11), (12), (13) voraussetzen. Nach IV ist $\{\mathfrak{K}^\alpha\} = 0$ für alle $\alpha > 0$, im besonderen also $p_g = 0$ und $p_a = -p \leqq 0$. Ferner sei $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$ und der Körper enthalte keine vollkommenen Primteiler.

Der Körper K enthält nach IV immer primitive Klassen $(\mathfrak{C})$ mit $\{\mathfrak{C}\} \geqq 2$ und $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) < 0$. Wir setzen $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{C}^\delta$ und betrachten die Klasse $(\mathfrak{Q})$, wo wir uns die Wahl der positiven ganzen Zahl δ noch vorbehalten, sie aber mindestens so groß wählen, daß $\{\mathfrak{Q}\} \geqq 4$ ist. Dann ist auch $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{K}) < 0$. Für genügend große positive Werte von ν ist nach Voraussetzung $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\nu\} = 0$ und im besonderen sei

$$\{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha\} \geqq 2, \qquad \{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha+1}\} \leqq 1,$$

so daß die Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha)$ die letzte in der Folge der mehrfach adjungierten Klassen von der Dimension größer als 1 ist. Sie kann imprimitiv sein und enthalte den Faktor $\mathfrak{V}$, so daß

$$(71) \qquad (\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha) = \mathfrak{V}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{V}_1^{h_1}\mathfrak{V}_2^{h_2} \ldots \mathfrak{V}_l^{h_l}(\mathfrak{H}),$$

wo die Restklasse $(\mathfrak{H})$ primitiv sein soll.

Wenn sich bei der Untersuchung des Faktors $\mathfrak{V}$ nach VI noch nicht ergibt, das K halbrational ist, betrachten wir die Restklasse $(\mathfrak{H})$. Nach VI, Hilfsatz 1 ist

$$\bar{\pi}(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^\alpha) \geqq \bar{\pi}(\mathfrak{H}),$$

und nach (17), (18)

$$(72)\quad \{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}\} = \{\mathfrak{G}_{\alpha}\} = \{\mathfrak{H}\} \geqq \pi_{\alpha-1} - p = \pi_{\alpha} - p - (\mathfrak{G}_{\alpha}, \mathfrak{K}),$$

wo nach (19) wegen $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{K}) < 0$, $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 0$

$$(\mathfrak{G}_{\alpha}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{K}) + \alpha(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) < 0.$$

Wir setzen

$$-(\mathfrak{G}_{\alpha}, \mathfrak{K}) = D > 0$$

und erhalten

$$(73)\quad \{\mathfrak{H}\} - 1 \geqq D + \pi_{\alpha} - p - 1.$$

Nach (19) können wir die Zahl δ so groß wählen, daß $D > 3(p+1)$ ist. Damit folgt aus (73)

$$(74)\quad \{\mathfrak{H}\} - 1 \geqq 2(p+1) + \pi_{\alpha}.$$

Wir bezeichnen mit ϱ das Geschlecht der Klasse $(\mathfrak{H})$.

Zunächst sei $\varrho = 0$. Wegen $\pi_{\alpha} \geqq 0$, $p \geqq 0$ folgt aus (74)

$$\{\mathfrak{H}\} \geqq 1 + 2(p+1) + \pi_{\alpha} \geqq 3.$$

K enthält das aus zwei verschiedenen ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H})$ gebildete Büschel und das ist ein Büschel vom Geschlechte 0 von Primteilern vom Geschlechte 0. Dann ist K nach M. Noether rational und der Satz ist bewiesen.

Nun sei $\varrho > 0$. Dann ist nach VI, Hilfssatz 1 und 3

$$(75)\quad 0 < \varrho = \pi(\mathfrak{H}) \leqq \pi_{\alpha} \leqq p + 1$$

und daraus folgt

$$\{\mathfrak{H}\} - 1 \geqq 2(p+1) + \varrho \geqq 3\varrho.$$

Zerfallen nicht alle ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H})$, so enthält der Körper eine primitive Divisorenklasse $(\mathfrak{H})$ mit

$$\pi(\mathfrak{H}) = \varrho \leqq p + 1, \qquad \{\mathfrak{H}\} - 1 = r \geqq 3\varrho.$$

Für $\varrho > 2$ ist K nach G. Castelnuovo und F. Enriques (Lit.-Verz. 3, Nr. 11) rational oder halbrational und der Satz ist bewiesen.

Für $\varrho = 1, 2$ ist $\{\mathfrak{H}\} \geqq 3\varrho + 1$. Da für eine primitive Klasse allgemein die Beziehung $\{\mathfrak{H}\} \leqq (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) + 2$ gilt, wird

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) \geqq 3\varrho - 1.$$

Für $\varrho = 1$ enthält K das aus zwei ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H})$ gebildete Büschel und das ist ein Büschel von Primteilern vom Geschlechte 1 mit mindestens einem einfachen Basispunkt. Dann ist K nach G. Castelnuovo und F. Enriques (Lit.-Verz. 5, Nr. 5) rational oder halbrational und der Satz ist bewiesen. Für $\varrho = 2$ enthält K das aus zwei ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H})$ gebildete Büschel und das ist ein Büschel von Primteilern vom Geschlechte 2 mit mehr

als zwei einfachen Basispunkten oder einem doppelten Basispunkt. Auch in diesem Falle ist K nach G. Castelnuovo und F. Enriques (Lit.-Verz. 5, Nr. 5) rational oder halbrational.

Zerfallen alle ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H})$, so bestehen diese aus den Primteilern eines Büschels, das wir mit $\langle \mathfrak{A} \rangle$ bezeichnen; und zwar zerfällt nach VI, Hilfssatz 2 jeder ganze Divisor $\mathfrak{H}$ in mindestens r Primteiler des Büschels $\langle \mathfrak{A} \rangle$. Jeder ganze Divisor $\mathfrak{H}$ zerfalle in $s \geqq r$ Primteiler $\mathfrak{A}$ und es sei

$$(76) \qquad \mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha} \sim \mathfrak{B}\mathfrak{H} \sim \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_s,$$

wo der Faktor $\mathfrak{B}$ nicht mit allen ganzen Divisoren $\mathfrak{H}$, also auch nicht mit allen Primteilern $\mathfrak{A}_i$ einen gemeinsamen Teiler haben kann, so daß $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) \geqq 0$ ist. Dann ist nach (76)

$$2\varrho - 2 = (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{K}) = \sum (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i\mathfrak{K}) + 2\sum_{i<k} (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k).$$

$$= s\{2\pi(\mathfrak{A}) - 2 + 2\sigma(\mathfrak{A})\} + 2\sum_{i<k} (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k).$$

Ist $\pi(\mathfrak{A}) = 0$, so enthält K ein Büschel von Divisoren vom Geschlechte 0. Dann ist K rational oder halbrational und der Satz ist bewiesen.

Ist $\pi(\mathfrak{A}) > 0$, so ist $2\pi(\mathfrak{A}) - 2 + 2\sigma(\mathfrak{A}) \geqq 0$ und dann folgt aus (75) und wegen $s \geqq r \geqq 3\varrho > 0$

$$p \geqq \varrho - 1 \geqq 3\varrho\{\pi(\mathfrak{A}) - 1 + \sigma(\mathfrak{A})\} + \sum_{i<k} (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k).$$

Diese Ungleichung kann wegen $\varrho > 0$ nur erfüllt sein für $\pi(\mathfrak{A}) - 1 + \sigma(\mathfrak{A}) \leqq 0$. Es muß also $\pi(\mathfrak{A}) = 1$, $\sigma(\mathfrak{A}) = 0$ sein.

Ist $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) > 0$, so enthält K ein Büschel von Divisoren vom Geschlechte 1 mit mindestens einem einfachen Basispunkt, denn jede Stelle, in der sich zwei Divisoren eines Büschels treffen, ist eine feste Stelle des Büschels. Dann ist K rational oder halbrational und der Satz ist bewiesen.

Es bleibt noch der eine Fall $\pi(\mathfrak{A}) = 1$, $\sigma(\mathfrak{A}) = 0$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = 0$ zu betrachten. Es folgt

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{K}) = 2\pi(\mathfrak{A}) - 2 + 2\sigma(\mathfrak{A}) = 0$$

und daher

$$(77) \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{K}) = 0.$$

Nach (75) ist $\pi_\alpha \geqq 1$ und nach (19) wird $\pi_\alpha - \pi_{\alpha-1} = (\mathfrak{G}_\alpha, \mathfrak{K})$, also

$$\pi_{\alpha-1} = D + \pi_\alpha \geqq D + 1.$$

Wir setzen

$$(78) \qquad \pi_{\alpha-1} = D + 1 + x,$$

wo dann $x \geqq 0$ ist. Nach (15), (16) und (78) ist

$$(79) \qquad 2(\pi_{\alpha-1} - 1) = (\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha-1}, \mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}) = 2(D + x).$$

Es sei $(\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}) = t$, also wegen (77) auch $(\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}, \mathfrak{A}) = t$. Dann wird nach (77) und (79)

$$2(D+x) = (\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha-1}, \mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}) = (\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha-1}, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_s)$$
$$= (\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha-1}, \mathfrak{B}) + st = (\mathfrak{B}\mathfrak{H}\mathfrak{K}^{-1}, \mathfrak{B}) + st$$

(80) $$2(D+x) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{B}) - (\mathfrak{B}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{H}) + st$$

(81) $$2(D+x) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{Q}) + (\alpha - 1)(\mathfrak{B}, \mathfrak{K}) + st.$$

Wir setzen

(82) $$2(D+x) = \sum_{k=1}^{s} h_k a_k + st,$$

wo nach (71) $h_k > 0$ und nach (80)

(83) $$a_k = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}) - (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{H})$$

oder nach (81)

(84) $$a_k = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{Q}) + (\alpha - 1)(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{K})$$

sein soll.

Wäre $a_k < 0$ für ein k, etwa für $k = 1$, so wäre nach (84) $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{K}) < 0$ und nach (83) $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}) < 0$, also $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) < 0$. Es würde gegen die Annahme folgen, daß K vollkommene Primteiler enthält. Daher sind alle $a_k \geqq 0$ und es ist nach (82)

$$2(D+x) \geqq st.$$

Nach (76) ist $s \geqq \{\mathfrak{H}\} - 1 = \{\mathfrak{Q}\mathfrak{K}^{\alpha}\} - 1$, nach (72) $s \geqq \pi_{\alpha-1} - p - 1$ und nach (78) $s \geqq D + 1 + x - p - 1 = D + x - p$. Daher folgt

$$2(D+x) \geqq (D+x-p)t, \qquad tp \geqq (D+x)(t-2),$$

und diese Ungleichung kann wegen $D > 3(p+1)$ nur erfüllt sein für $t = (\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}) \leqq 2$. Der Divisor $\mathfrak{A}$ schneidet den Divisor $\mathfrak{Q}$ höchstens in zwei Stellen. Da $\{\mathfrak{Q}\} \geqq 4$ ist, muß $(\mathfrak{A}, \mathfrak{Q}) = t > 0$ sein und es bestehen nur die beiden Möglichkeiten $t = 1$ und $t = 2$.

Ist $t = 1$, so setzen wir $\tau = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}$, wo $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zwei ganze Divisoren der Klasse $(\mathfrak{Q})$ sein sollen. Für $\tau = 0$, d. h. $\mathfrak{Q}_1 = 0$ geht $\mathfrak{A}$ über in eine Stelle des Divisors $\mathfrak{Q}_1$, da $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{A}) = 1$ ist. Jedem Werte von τ entspricht eine Stelle von $\mathfrak{A}$. Die Stellen von $\mathfrak{A}$ lassen sich als rationale Funktionen einer Funktion τ darstellen und daher ist $\pi(\mathfrak{A}) = 0$ im Widerspruch zur Annahme.

Ist $t = 2$, so wählen wir auf $\mathfrak{A}$ eine Stelle P und $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ als ganze Divisoren von $(\mathfrak{Q})$, die durch P gehen. Wir setzen wieder $\tau = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}$. Für $\tau = 0$, d.h. $\mathfrak{Q}_1 = 0$ geht $\mathfrak{A}$ über in die feste Stelle P und eine bewegliche Stelle. Jedem Werte von τ entspricht eine bewegliche Stelle von $\mathfrak{A}$. Die Stellen von $\mathfrak{A}$ lassen sich daher als rationale Funktionen von τ darstellen und daraus folgt $\pi(\mathfrak{A}) = 0$ im Widerspruch zur Annahme.

Der Fall $\pi(\mathfrak{A}) = 1$, $\sigma(\mathfrak{A}) = 0$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = 0$ ist also unter unseren Voraussetzungen nicht möglich. Damit ist der Hauptssatz über halbrationale Körper für alle Fälle bewiesen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. H. W. E. Jung, für die Anregung der Arbeit sowie für das rege Interesse und die wertvollen Ratschläge bei ihrer Ausführung auch an dieser Stelle ergebenst zu danken.

Literaturangabe.

1. H. W. E. Jung: Über Flächen mit einem Büschel rationaler Kurven. Mathematische Annalen, Band 82.
2. H. W. E. Jung: Stellentransformation in algebraischen Körpern zweier Veränderlicher. Erscheint demnächst in den Acta mathematica.
3. G. Castelnuovo und F. Enriques: Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche. Annali di Matematica, s. III, t. VI, 1901.
4. F. Enriques: Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 20, 1905.
5. G. Castelnuovo und F. Enriques: Sulle condizioni di rationalita dei piani doppi. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1900.
6. M. Noether: Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. Mathematische Annalen, Band 8.

Zu der angewandten Methode vergleiche man

H. W. E. Jung: Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Berlin u. Leipzig, 1923.
— Algebraische Flächen, Hannover 1925,
sowie die Spezialabhandlungen von H. W. E. Jung.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Ernst Paul Gerhard Görner, am 30. Oktober 1911 zu Leuna als Sohn des Landwirts Paul Görner und dessen Ehefrau Frieda geb. Heyne, beide evangelischer Konfession.

Von Ostern 1918 bis Weihnachten 1924 besuchte ich die Mittelschule in Merseburg und von Januar 1925 an die Städtische Oberrealschule in Halle, die ich am 8. März 1930 mit dem Zeugnis der Reife verließ.

Von April 1930 bis Februar 1932 studierte ich in Kiel, von April 1932 bis November 1934 in Halle Mathematik, Chemie und Physik. Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten:

in Kiel: Diels, Feller Fraenkel, Kossel, Mumm, Schmidt, Strempel, Zahn,

in Halle: Behmann, Baer, Brandt, Conrad, Hahne, Hoffmann, Jung, Menzer, Noack, Pose, Reinhold, Scholder, Siebert, Smekal, Vorländer, v. Wolff.

Allen diesen Herren fühle ich mich zu großem Dank verpflichtet!